Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Математический анализ»

517.3(07)
К665

М.Е. Коржова
А.Н. Пермина

Применение определенного интеграла

Руководство к решению задач

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2009

УДК 517.3(076.2)
К665

Одобрено учебно-методической комиссией
механико-математического факультета

Рецензенты:
Винтиш Т.Ю.

К665 **Коржова, М.Е. , Пермина, А.Н.**
Применение определенного интеграла: руководство к решению задач / М.Е. Коржова, А.Н. Пермина. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – 37 с.

Руководство к решению задач предназначено для самостоятельной работы студентов при изучении приложения определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.

В каждый раздел включено достаточное количество примеров с подробным описанием решения каждого из них.

Каждая тема учебного пособия содержит краткое описание алгоритма применения определенного интеграла.

УДК 517.3(076.2)

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость возникновения дифференциального и интегрального исчислений проистекает из того факта, что изучение явлений природы и технических процессов в подавляющем большинстве случаев приводит к математическим задачам *двух типов*, причем оказывается, что задачи одного типа решаются методом, составляющим сущность *дифференциального* исчисления (что не является предметом рассмотрения в данном руководстве), а задачи второго типа – методом, составляющим сущность *интегрального* исчисления.

В науке возник сперва не неопределенный интеграл, а определенный и не как разность значений первообразной, а как предел интегральной суммы. Объясняется это тем, что такого рода предельный переход представляет собой естественный метод решения задач, типичных для очень большого круга практических вопросов. К числу таких задач относится, например, задача определения работы силы. Исходя из этого частного примера, задачу интегрального исчисления можно сформулировать в общем виде как задачу установления свойств явления «в целом» (на протяжении заданного отрезка, промежутка времени и т.п.) на основании его характеристики в точке (на основании мгновенной, местной характеристики).

Итак, вычисление работы силы сводится к вычислению предела интегральной суммы, т.е. к вычислению определенного интеграла. То же самое имеет место при решении всякой задачи рассматриваемого типа.

На первом этапе развития интегрального исчисления все задачи этого типа решались прямым вычислением искомого предела интегральной суммы; именно таким путем были решены некоторые задачи уже в древности (Архимед). Но при таком подходе к делу каждая новая задача интегрального исчисления требовала изобретения особых способов для вычисления предела каждой получаемой интегральной суммы. Общего способа для вычисления пределов интегральных сумм не существовало.

Между тем простое сравнение самой постановки задач дифференциального и интегрального исчислений показывает, что задачи этих двух типов являются в полном смысле слова взаимно обратными. Благодаря этому открытию прямое вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы оказалось возможным заменить действием, обратным дифференцированию. Таким образом, задачи второго типа приобрели для своего решения общий метод.

1. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Определенным интегралом можно выразить многообразные геометрические и физические величины. При этом применяется следующая единообразная схема:

1) Искомая величина U ставится в соответствие с промежутком (a,b) изменения некоторого аргумента.

Так, чтобы выразить интегралом площадь $aABb$ под линией AB, ставим ее в соответствие с промежутком (a,b) изменения абсциссы x.

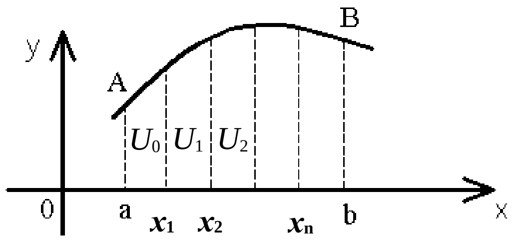


Рис.1.1

2) Промежуток (a,b) разбивается на участки (a,x_1), (x_1,x_2), ..., (x_n,b).

Пусть искомая величина U распадается на части U_0, U_1, $U_2,...$, в сумме дающие U. Величины, обладающие этим свойством, называются *аддитивными*. Бывают и неаддитивные величины. Так, угол между образующими конической поверхности – неаддитивная величина. Угол AOB можно поставить в соответствие с промежутком (a,b), где $a = R\breve{A}$ и $b = R\breve{B}$ – дуги направляющей, отсчитываемые от какой-либо начальной точки R. Но если разбить (a,b) на участки (a,c) и (c,b), то соответствующие углы AOC и COB в сумме не дают угла AOB.

Аддитивную величину можно выразить интегралом, неаддитивную – нельзя.

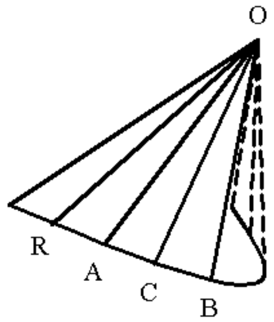


Рис.1.2

3) В качестве типичного представителя частей U_0, $U_1,...$ берется одна из них U_i; она выражается (исходя из условий вопроса) приближенной формулой вида

$$U_i \approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i), \qquad (1.1)$$

причем погрешность должна иметь высший порядок относительно $x_{i+1} - x_i$.

Выражение $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ или сокращенно $f(x)\Delta x$ называется элементом величины U.

Элементом площади $aABb$ является площадь прямоугольника $x_i K Q x_{i+1}$; погрешность формулы (1) есть площадь треугольника KQL, заштрихованного на чертеже; она имеет высший порядок относительно $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ (площадь

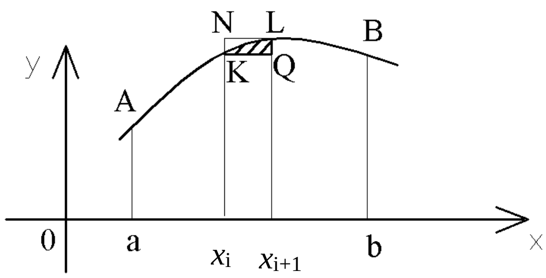


Рис.1.3

KQL меньше площади $KNLQ = KQ \cdot KN = \Delta x_i \Delta y_i$, а последняя имеет высший порядок относительно Δx_i).

4) Из приближенного равенства (1.1) вытекает точное равенство $U = \int_a^b f(x)dx$.

1.1. Площадь криволинейной трапеции

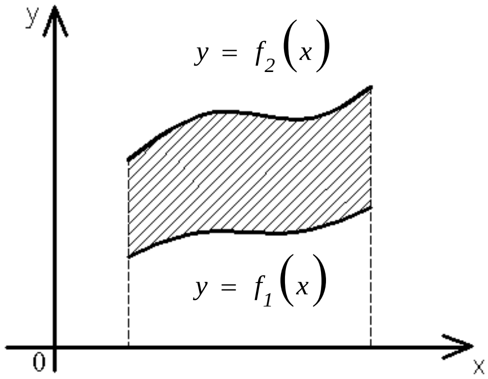


Рис.1.4

Площадь S, ограниченная непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, вертикальными $x = a, x = b$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ при $a \le x \le b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (1.2)$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2$.

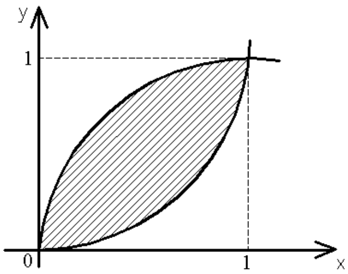


Рис.1.5

Решение. Нетрудно видеть, что графики пересекаются в точках $(0;0)$ и $(1;1)$.

Поэтому $S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (кв.ед.)

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = 2 - x^2$.

Решение. На рисунке 1.6. видно, что пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Найдем их. Для этого необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$

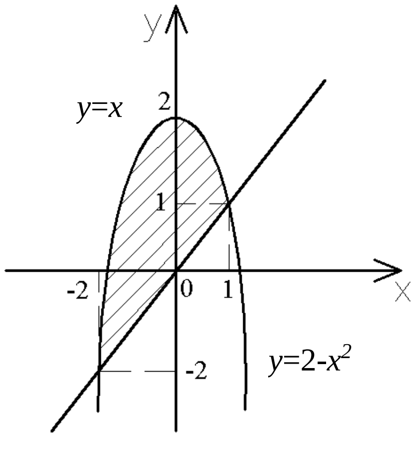


Рис.1.6

В результате получаем $x_1 = -2, \quad x_2 = 1$. Тогда искомая площадь по формуле (1.2) равна $S = \int_{-2}^{1} \left[\left(2 - x^2\right) - x\right]dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$(кв.ед.).

Пример. Найти площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $(3;5)$ и осью Oy.

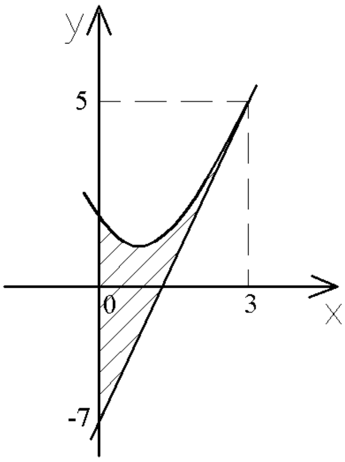


Рис.1.7

Решение. Уравнение касательной к кривой $f(x) = x^2 - 2x + 2$ в точке $(3;5)$ имеет вид $y - 5 = f'(3)\cdot(x-3)$.

Поскольку $f'(x) = 2x - 2$ и $f'(3) = 2\cdot 3 - 2 = 4$, получаем уравнение касательной $y - 5 = 4(x-3)$, или $y = 4x - 7$.

Так как ветви параболы направлены вверх (рис.1.7), то парабола лежит над касательной, т.е. $x^2 - 2x + 2 \geq 4x - 7$ на отрезке $[0,3]$. Тогда находим искомую площадь:

$$S = \int_0^3 \left[x^2 - 2x + 2 - (4x-7)\right]dx = \int_0^3 \left(x^2 - 6x + 9\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]\Bigg|_0^3 = 9(кв.ед.).$$

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$, у которого нижний предел меньше верхнего $(a<b)$.

Если при этом функция $f(x)$ положительна внутри промежутка (a,b) то интеграл численно равен площади, покрываемой ординатами графика, $y = f(x)$ $(aADEBb)$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией* (рис.1.8).

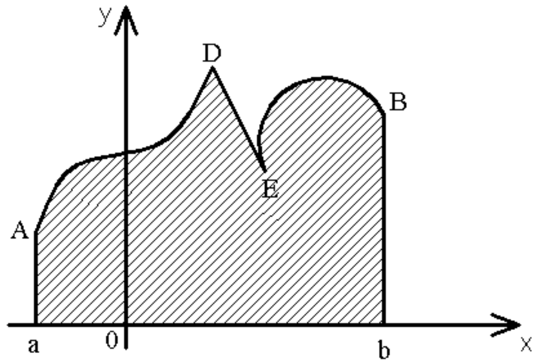


Рис.1.8

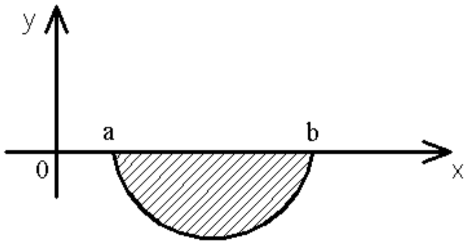


Рис.1.9

Если функция $f(x)$ отрицательна внутри (a,b), то интеграл по абсолютному значению численно равен площади, покрываемой ординатами графика $y = f(x)$, но имеет отрицательное значение, т.е.

(1.3) $\quad S = \int_a^b f(x)dx -$ площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 1.8.

(1.4) $\quad S = -\int_a^b f(x)dx -$ площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 1.9.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x, y = 5 - x$, $x = 1, x = 2.$

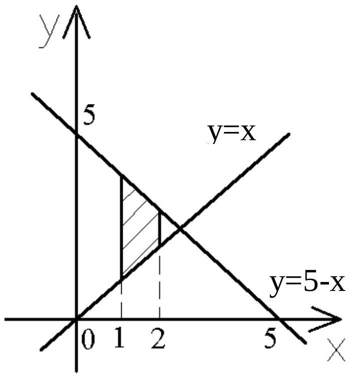


Рис.1.10

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 1.10. По формуле (1.2) получим:

$$S = \int_1^2 ((5 - x) - x)dx = \int_1^2 (5 - 2x)dx = \left(5x - x^2\right)\Big|_1^2 = \left(5 \cdot 2 - 2^2\right) - \left(5 \cdot 1 - 1^2\right) = 6 - 4 = 2(кв.ед.).$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, y = 0.$

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 11.

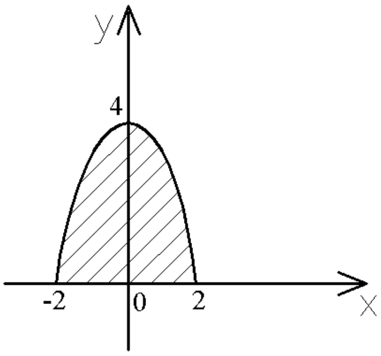


Рис.1.11

Воспользовавшись формулой (2), получим

$$S = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left[4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}(кв.ед.).$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Решение. Так как данная фигура разделяется координатными осями на четыре равные част, то, найдя четверть искомой площади и умножив результат на четыре, определим, очевидно, всю искомую площадь.

Из уравнения эллипса получаем уравнение линии, ограничивающей рассматриваемую нами криволинейную трапецию: $y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (перед корнем берем знак +, потому что рассматриваем дугу эллипса, расположенную над осью абсцисс (рис.1.12)).

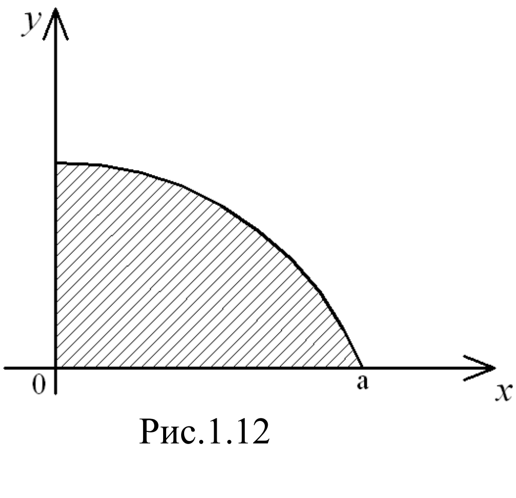


Рис.1.12

Тогда, обозначая величину искомой площади через S, будем иметь:

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Для вычисления полученного интеграла сделаем подстановку $x = a\sin t$. Отсюда $dx = a\cos t\, dt$.

Из соотношения $x = a\sin t$ находим пределы интеграла, который получится в результате подстановки. Полагая $x = 0$, получаем: $a\sin t = 0$, $\sin t = 0$, откуда $t = 0$; при $x = a$ имеем: $a = a\sin t$, $\sin t = 1$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\,dt = \frac{4b}{a}a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2ab\left[\int_0^{\pi/2}dt + \int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt\right] = 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2ab\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0\right) = \pi ab(кв.ед.)$$

Более сложные задачи на вычисление площадей решают, используя свойство аддитивности площади: можно разбить фигуру на непересекающиеся части и вычислить площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

Пример. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x, y = 1/x^2$, $y = 0, x = 3.$

Решение. Данную фигуру можно рассматривать как криволинейную трапецию, ограниченную осью абсцисс, прямыми $x = 0, x = 3$ и графиком функции, которая на отрезке $[0,1]$ равна x, а на отрезке $[1,3]$ равна $1/x^2$.

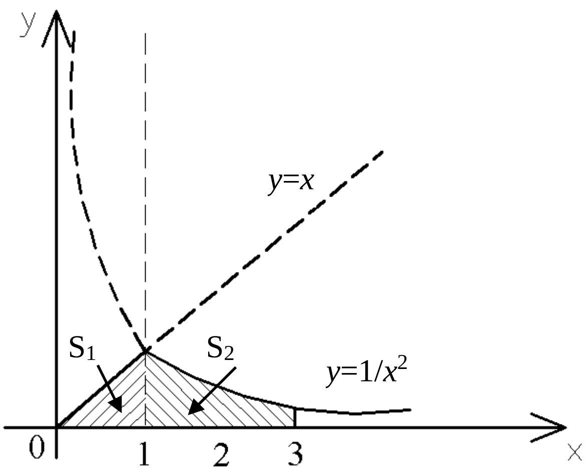


Рис.1.13

Записать первообразную такой функции нелегко. Поэтому разобьем данную криволинейную трапецию прямой $x = 1$ на две части. Площади этих частей легко найти по формуле: $S_1 = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(кв.ед.)$; $S_2 = \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^3 = \frac{2}{3}(кв.ед.)$.

Согласно свойству аддитивности площади, $S = S_1 + S_3 = 7/6(кв.ед.)$.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$.

Решение. Фигура, площадь которой требуется найти, изображена на рисунке 1.14. Проведем прямую $x = 2$. Тогда площадь S интересующей нас фигуры равна сумме $S_1 + S_2$, где $S_1 -$ площадь фигуры, заштрихованной на рисунке вертикальной штриховкой, а $S_2 -$ площадь фигуры, заштрихованной на рисунке горизонтальной

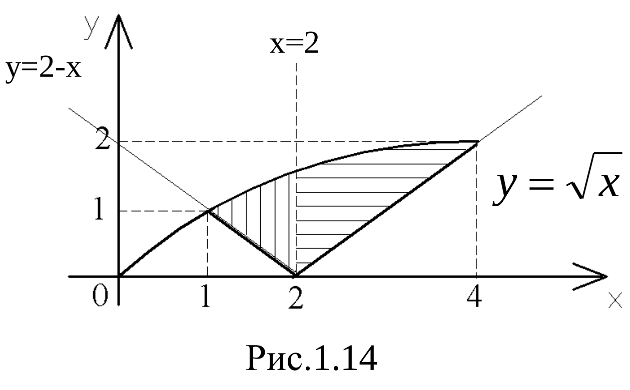


Рис.1.14

штриховкой. Имеем $S_1=\int\limits_1^2\left(\sqrt{x}-(2-x)\right)dx=\int\limits_1^2\left(x^{\frac{1}{2}}+x-2\right)dx=$

$$=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3}+\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3}+\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}-2-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}(кв.ед.);$$

$$S_2=\int\limits_2^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx=\int\limits_1^2\left(x^{\frac{1}{2}}-x+2\right)dx=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{4^2}{2}+2\cdot 4\right)-$$

$$-\left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)=\frac{16}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}-2=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}(кв.ед.).$$

Значит, $S=S_1+S_2=\dfrac{8\sqrt{2}-7}{6}+\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{13}{6}(кв.ед.).$

Иногда при вычислении площадей фигур бывает полезно еще одно свойство площади, которое называется инвариантностью относительно перемещений: одинаковые фигуры имеют одинаковые площади.

Пример. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}, y=2, x=0.$

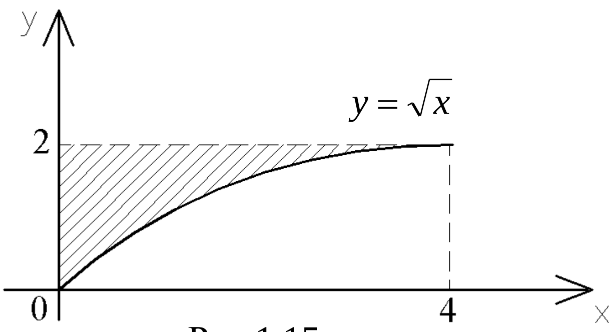


Рис.1.15

Решение. Данная фигура станет криволинейной трапецией, если отразить ее относительно прямой $y=x$. График функции $y=\sqrt{x}$ отобразится при этом в график обратной функции $y=x^2$, прямая $y=2-$ в прямую $x=2$. Так как симметричные фигуры одинаковы, то они имеют равные площади, поэтому имеем $S=\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}(кв.ед.).$

Замечание. Другое решение этой задачи можно получить, заметив, что данная фигура дополняется криволинейной трапецией (снизу) до прямоугольника, площадь которого равна 8. Поэтому:

$$S=8-\int\limits_0^4\sqrt{x}dx=\left(8-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^4=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}(кв.ед.).$$

Такое решение – еще один пример использования свойства аддитивности площади: данная фигура представляется как «разность» двух более простых фигур.

Пусть теперь $f(x)$ один или несколько раз меняет знак в промежутке (a,b). Тогда интеграл равен разности двух чисел, одно из которых (уменьшаемое) выражает площадь, покрытую положительными ординатами, а другое (вычитаемое) – площадь, покрытую отрицательными ординатами.

Так, для случая, изображенного на рисунке,

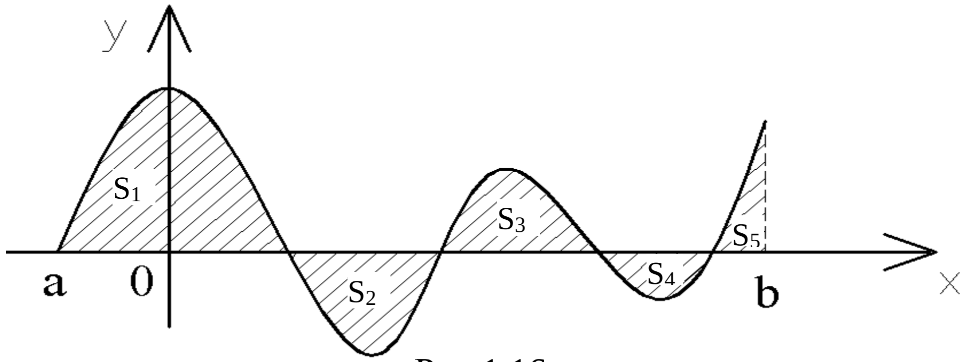
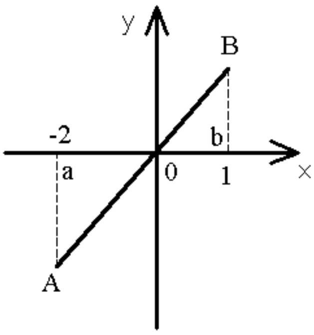


Рис.1.16

$$S=\int_a^b f(x)dx=(S_1+S_3+S_5)-(S_2+S_4). \qquad (1.5)$$

Пример. Интеграл $\int_{-2}^{1} 2xdx=1^2-(-2)^2=-3.$ Это число равно разности



площадей $ObB=\frac{1}{2}Ob\cdot bB=1.$

$$OaA=\frac{1}{2}aO\cdot Aa=4.$$

Рис.1.17

При вычислении площади криволинейной трапеции в случае, когда верхняя граница задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\le t\le\beta,$ в формуле (2) необходимо сделать замену переменной, положив $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt.$ Тогда получим

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt, \qquad (1.6)$$

где α и β – значения параметра t, соответствующие значениям $x=a$ и $x=b$, т.е. $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta).$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - sint),\ y = a(1 - cost), 0 \le t \le 2\pi$, и осью Ox.

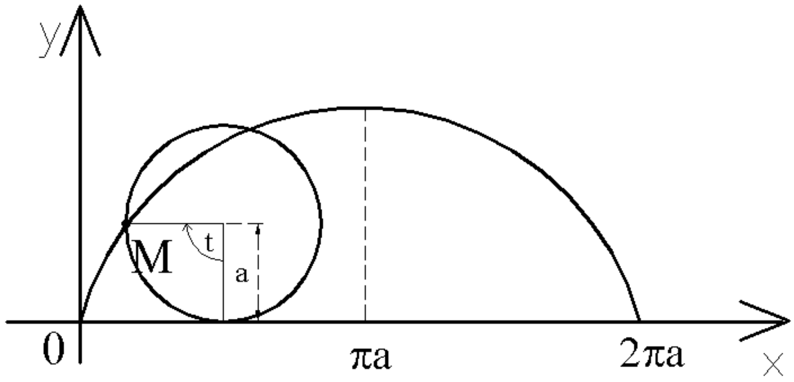


Рис.1.18

Решение. По формуле (5) имеем $S = \int_0^{2\pi} a(1 - cost)a(1 - cost)dt = a^2 \times$

$$\times \int_0^{2\pi} (1 - cost)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2cost + \frac{1 + cos2t}{2}\right)dt = a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2sint + \frac{1}{4}sin2t\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$= 3\pi a^2 (кв.ед.).$

1.2. Площадь криволинейного сектора

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательная на отрезке $[\alpha, \beta]$.

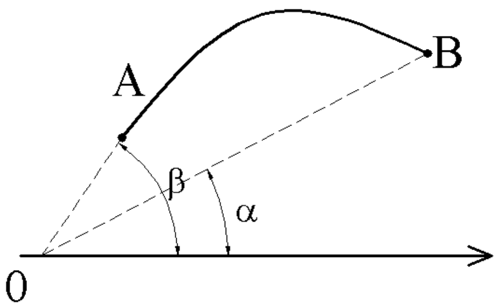


Рис.1.19

Плоская кривая, ограниченная кривой AB и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы α и β, называется *криволинейным сектором.* Площадь криволинейного сектора может быть вычислена по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (1.7)$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, где $a -$ положительное число.

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус опишет кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$. Поэтому по формуле (6) имеем: $S_{OABC} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 (кв.ед.).$

Заметим, что точка C отстоит от полюса на расстоянии $\rho = 2\pi a$. Поэтому круг радиуса OC

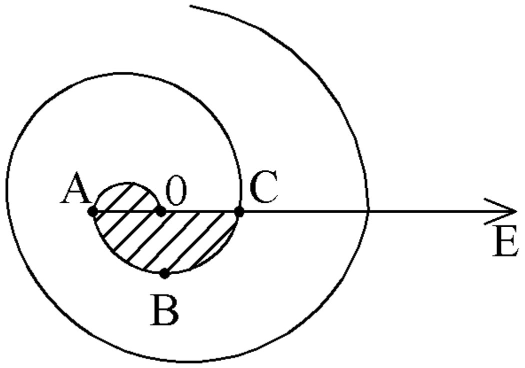


Рис.1.20

имеет площадь $\pi \cdot OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi^3 a^2 = \; = 3S_{OABC}$, т.е. площадь фигуры, ограниченной

полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна $1/3$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка. К этому выводу пришел еще Архимед.

1.3. Длина дуги кривой

Длина L дуги AB плоской линии выражается (в прямоугольных координатах) формулой:

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, \qquad (1.8)$$

где $t -$ какой-либо параметр, через который выражены текущие координаты $x, y\ (t_2 > t_1)$.

Если параметр еще не выбран, то формулу (7) удобнее записать так:

$$L = \int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (1.9)$$

Обозначения $(A),(B)$ указывают, что в качестве пределов интегрирования должны быть взяты такие значения параметра, которые соответствуют концам дуги AB. В частности, за параметр часто удобно принять абсциссу x. Тогда:

$$L = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (1.10)$$

Пример. Найти длину дуги одной ветви циклоиды $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$.

Решение. $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = a\sqrt{(1-cost)^2 + sin^2 t} = a\sqrt{2(1-cost)} = 2a\left|sin\frac{t}{2}\right|.$

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\,sin\frac{t}{2}dt = 2a \cdot 2\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\,cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(cos\pi - cos0) = -4a \cdot (-2) = 8a.$$

Т.е. длина одной ветви циклоиды равна учетверенному диаметру производящего круга.

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$ от $x = 0$ до $x = 5$.

Решение. Из уравнения $y = x^{3/2}$ находим $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Следовательно, по формуле (9) получим: $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5 = \frac{335}{27}.$

При вычислении длины дуги в случае, когда кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta,$ где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точкам A и B соответствуют значения α и $\beta,$ переходя от полярных координат к прямоугольным, получим параметрическое задание кривой AB уравнениями $x = \rho cos\varphi,\ y = \rho sin\varphi$ с параметром $\varphi.$ Тогда формула (7) примет вид:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi, \qquad (1.11)$$

где α и $\beta -$значения параметра $\varphi.$

Пример. Вычислить длину первого витка архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ (рис. 19).

Решение. Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до $2\pi.$ Тогда по формуле (10), искомая длина дуги равна:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi + a^2}d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi = \begin{vmatrix} U = \sqrt{\varphi^2 + 1}; & dU = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}d\varphi \\ dV = d\varphi; & V = \varphi \end{vmatrix} =$$

$$a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}d\varphi\right] = a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2 + 1 - 1}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}d\varphi\right] = a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\Big|_0^{2\pi} -\right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}\right] = a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2}ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right|\right]\Bigg|_0^{2\pi} = a\Big[\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right].$$

1.4 Площадь поверхности вращения

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x),\ a \le x \le b,$ и пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$. Тогда поверхность, образованная вращением кривой AB вокруг оси Ox, имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \qquad (1.12)$$

Если поверхность получается вращением кривой AB, заданной уравнением $x = \varphi(y),\ c \le y \le d$, вокруг оси Oy, то ее поверхность:

$$S = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy. \qquad (1.13)$$

Если поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta,$ причем $\psi(t) \ge 0,\ \varphi(t)$ изменяется от a до b при изменении t от α до β, то получим:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \qquad (1.14)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,$ где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha, \beta]$, то формула вычисления площади поверхности вращения примет вид:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi. \qquad (1.15)$$

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$, вокруг оси Ox.

Решение. По формуле (14) имеем:

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{(a \sin t)^2 + [a(1 - \cos t)]^2}\,dt = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2 (кв.ед.).$$

1.5 Объем тела

Рассмотрим тело произвольной формы (рис.1.21). Допустим, что известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox. С изменением x площадь сечения также будет изменяться, т.е. являться некоторой функцией x. Обозначив эту функцию через $S(x)$ и считая ее непрерывной функцией на отрезке $[a,\ b]$. Тогда объем тела:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1.16)$$

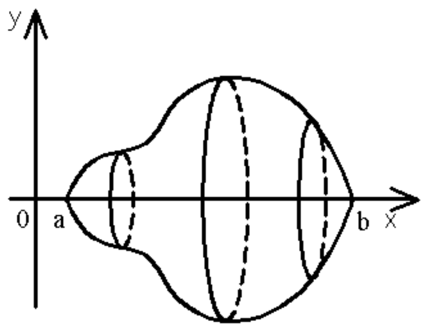


Рис.1.21

Пример. Вычислить объем пирамиды, высота которой равна H, а площадь основания Q.

Решение. Введем систему координат xOy так, чтобы начало координат находилось в вершине пирамиды, а ось Ox проходила по высоте H от вершины к основанию (рис.1.22). Пересечем пирамиду плоскостью, параллельной основанию. Расстояние от вершины пирамиды до секущей плоскости обозначим через $x,\ 0 \le x \le H$, а площадь сечения – через $S(x)$.

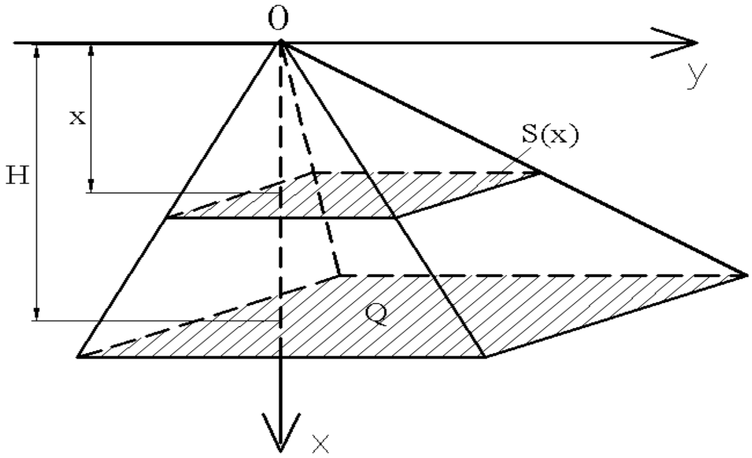


Рис.1.22

Составим пропорцию $\dfrac{S(x)}{Q} = \dfrac{x^2}{H^2}$, откуда находим $S(x) = \dfrac{Q}{H^2} x^2$.

Подставляя последнее равенство в формулу (15), имеем:

$$V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2 dx = \frac{Q}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{QH^3}{3H^2} = \frac{1}{3}QH\,(куб.ед.).$$

В частном случае, объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x) \ge 0$ и прямыми $x = a, x = b \quad (a < b),\ y = 0,$ равен:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (1.17)$$

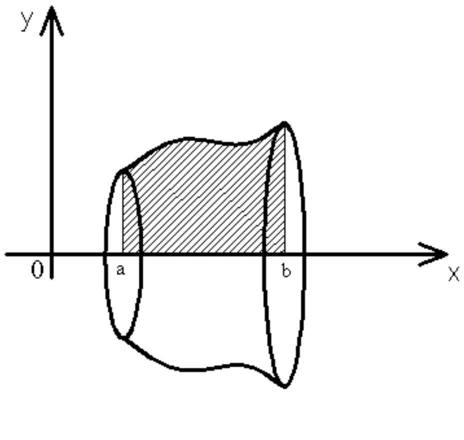


Рис.1.23

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = g(y) \ge 0$ и прямыми $y = a, y = b \quad (a < b),\ x = 0,$ равен:

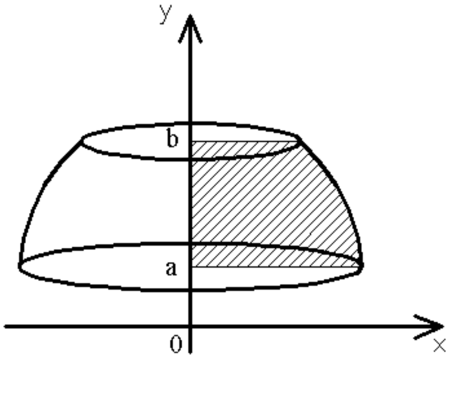


Рис.1.24

$$V = \pi \int_a^b g^2(y)dy. \qquad (1.18)$$

Пример. Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями: $y^2 = 9x, \quad y = 3x$.

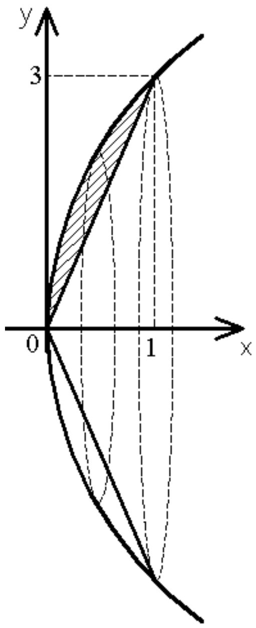


Рис.1.25

Решение. $V = \pi \int_0^1 \left(9x - 9x^2\right)dx = 9\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\pi (куб.ед.).$

Пример. Вычислить объем шара радиуса R.

Решение. Шар радиуса R получается вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox (рис.1.26), поэтому его объем V можно найти по формуле (16). Используя симметрию данного шара относительно оси Oy, находим:

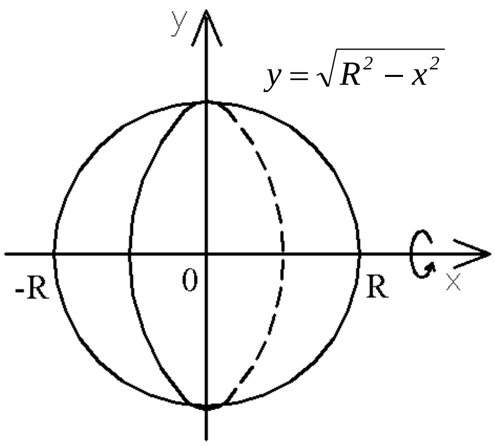


Рис.1.26

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(f(x)\right)^2 dx = 2\pi \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]\Bigg|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 (куб.ед.).$$

Пример. Найти объем сегмента параболоида вращения (рис.1.27) по радиусу основания $AB = r$ и высоте $OA = h$.

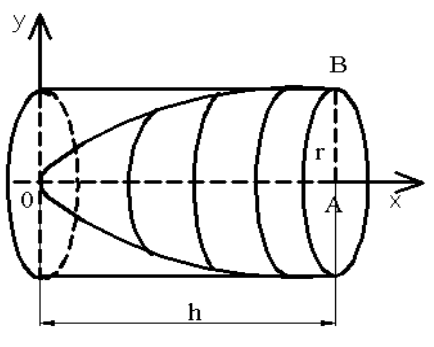


Рис.1.27

Решение. Находим, что парабола представляется уравнением $y^2 = \frac{r^2 x}{h}$. По формуле (16) находим:

$V = \pi\int_0^h \frac{r^2 x}{h}dx = \frac{1}{2}\pi r^2 h(куб.ед.)$, т.е. сегмент параболоида составляет по объему половину цилиндра с тем же основанием и той же высотой.

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, образуемой вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox (рис. 1.28).

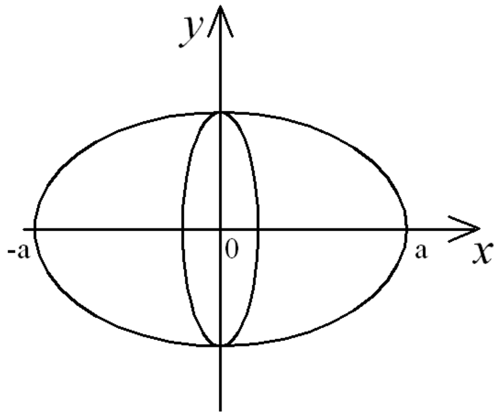


Рис.1.28

Решение. Так как $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$, то по формуле (1.17) получаем:

$$V = \pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}\left(a^2 - b^2\right)dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{+a} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab^2(куб.ед.).$$

2. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ФИЗИКИ И МЕХАНИКИ

2.1 Схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин

Понятие определенного интеграла вследствие его абстрактности широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин.

Для вычисления некоторой величины при помощи определенного интеграла можно руководствоваться следующей общей схемой (I):

1. Разбить u на большое число n малых слагаемых элементов Δu_i:

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + ... + \Delta u_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta u_i.$$

2. Найти приближенное значение каждого элемента Δu_i в виде произведения $\Delta u_i \approx f(x_i)\cdot\Delta x_i$ и затем приближенное значение u в виде интегральной суммы

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i, \qquad (2.1)$$

где x – один из параметров величины u, который по условию задачи изменяется в известном интервале $a \le x \le b$; $f(x)$ – данная или определяемая из условия задачи функция от x; $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n = b$ – точки интервала $[a;b]$, которые при разбиении u на n элементов разбивают этот интервал на n равных частей $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Здесь при вычислении приближенного значения малого элемента Δu_i используются различные допущения. Например, здесь допустимо малые криволинейные отрезки заменять стягивающими их хордами; переменную силу (или скорость) на малых участках пути здесь можно заменять постоянной силой (или скоростью), допуская, что она неизменно сохраняет на всем малом участке пути ту величину и то направление, которые она имела в начальной или конечной точке этого малого участка; переменную температуру непрерывно нагреваемого или охлаждаемого тела в течение малых промежутков времени здесь можно считать постоянной, допуская, что в течение каждого малого промежутка времени она неизменно сохраняет то значение, которое имела в начале или в конце этого промежутка.

3. Если из условия задачи следует, что при $n \to +\infty$ погрешность приближенного равенства (1) стремится к нулю, то искомая величина u будет численно равна определенному интегралу $u = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Многие величины можно выразить посредством определенного интеграла, пользуясь другой схемой (II):

1. Полагаем, что некоторая часть искомой величины U есть неизвестная функция $u(x)$, где x – один из параметров величины U, который изменяется в известном из условия задачи интервале $a \le x \le b$.

2. Найдем дифференциал du функции $u(x)$, т.е. приближенную величину (главную часть) ее приращения Δu при изменении x на малую величину dx в виде произведения $du = f(x)dx$, где $f(x)$ данная или определяемая из условия задачи функция от x.

При этом здесь также используются различные допущения, которые, в общем, сводятся к тому, что при изменении аргумента x на малую величину dx изменение функции $u(x)$ считается пропорциональным dx.

3. Убедившись, что дифференциал du найден верно, что при $dx \to 0$ бесконечно малые Δu и du будут эквивалентны, найдем искомую величину U, интегрируя du в пределах от $x = a$ до $x = b$:

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

2.2. Примеры решения физических задач с помощью схем (I) и (II)

Пример. Скорость тела дается формулой $v = \sqrt{1+t}$ *м/с*. Найти путь, пройденный телом за первые 10 *с* после начала движения.

Решение. Из курса физики известно, что путь, пройденный телом, зависит от скорости тела и равен $s = v \cdot t$. В данном случае, скорость является функцией от t и непрерывно меняется с течением времени. Путь, пройденный телом, будет также являться функцией от t, обозначим данную функцию как $s(t)$. Тогда элементарное перемещение тела ds за малый промежуток времени dt, можно выразить в виде соотношения $ds = v(t)dt$. Тогда путь, пройденный за первые 10 *с*, может быть найден с помощью определенного интеграла:

$$s = \int_0^{10} \sqrt{1+t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3}\Bigg|_0^{10} = \frac{2}{3}\sqrt{(1+10)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+0)^3} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1331} - \frac{2}{3} \approx 24{,}322 \text{ м}.$$

Ответ: $s \approx 24{,}322$ *м*.

Пример. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 *м*, и высотой 6 *м*.

Решение. Величина p давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения x, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости: $p = \delta a x$; δ – удельный вес жидкости, a – площадь площадки.

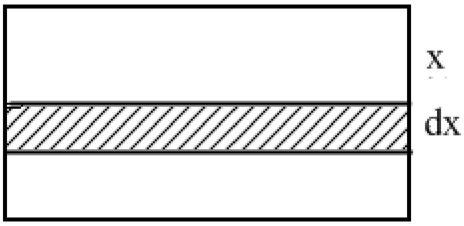


Рис. 2.1

Руководствуясь общей схемой (II) применения определенного интеграла к вычислению величин, разделим шлюз на глубине x горизонтальной прямой (рис. 2.1). Тогда давление воды на верхнюю часть шлюза будет некоторой функцией $p(x)$. Найдем дифференциал dp этой функции, т. е. приближенную (главную часть) ее приращения Δp при изменении глубины x на малую величину dx.

Допустим, ввиду малости dx, что все точки заштрихованной полоски находятся на глубине x, т. е. что она расположена на глубине x в горизонтальной плоскости. Тогда приближенная величина давления воды на эту полоску будет равна весу столба воды, имеющего основанием эту полоску, и высотой – глубину x: $\Delta p \approx dp = 18\delta x dx = 18xdx.$ (Удельный вес воды δ =1.)

Согласно условию задачи глубина x изменяется на отрезке $0 \le x \le 6$. Поэтому искомое давление P на весь шлюз найдем, интегрируя dp в пределах от 0 до 6:

$$P = 18\int_0^6 xdx = 9x^2\Big|_0^6 = 324T \approx 324000 \cdot 9{,}81\acute{i} \approx 3{,}18\grave{I}\ \acute{i}\,.$$

Пример. При условиях предыдущей задачи найти, на какой глубине $x = c$ надо разделить шлюз горизонтальной прямой, чтобы давление воды на верхнюю и нижнюю части шлюза было одинаково.

Решение. Определим давление воды на каждую часть шлюза, интегрируя dp в пределах от 0 до c и в пределах от c до 6, затем приравниваем интегралы:

$$18\int_0^c xdx = 18\int_c^6 xdx; \qquad x^2\Big|_0^c = x^2\Big|_c^6; \qquad c^2 = 36 - c^2.$$

Решая полученное уравнение, найдем $c = 3\sqrt{2} \approx 4,23$ *м*.

Пример. Найти давление воды на поверхность шара диаметром 4 *м*, если его центр находится на глубине 3 *м* от поверхности воды.

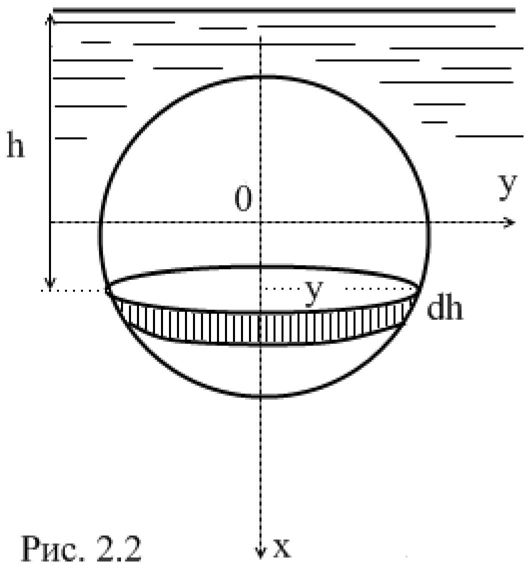


Рис. 2.2

Решение. Проведем через центр шара вертикальную плоскость и выберем на ней прямоугольную систему координат xOy, как показано на рис. 2.2.

Рассечем шар на глубине h горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет некоторой функцией $p(h)$.

При изменении h на величину dh площадь S отсеченной части поверхности шара, как площадь поверхности вращения вокруг оси Ox, изменится на величину $\Delta s \approx 2\pi y dl = ds$, где $-$ dl дифференциал дуги окружности, а давление $p(h)$ изменится на величину $\Delta p \approx 2\pi h y dl = dp$.

Выразим dp через одну переменную x интегрируя в пределах от $x = -2$ до $x = 2$, найдем давление воды на всю поверхность шара. Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$ найдем $y' = -\dfrac{x}{y}$ и затем $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\,dx = \dfrac{2}{y}dx;$ из чертежа находим $h = 3 + x$. Следовательно,

$$P = 2\pi \int_{-2}^{2} (3+x) y \frac{2}{y} dx = 4\pi \int_{-2}^{2} (3+x) dx = 2\pi (3+x)^2 \Big|_{-2}^{2} = 48\pi(T) \approx 470880\pi(\text{í}) \approx 0,471\pi(\text{Ì í}).$$

Давление на верхнюю половину поверхности шара получим, интегрируя dp в пределах от -2 до 0:

$$P_1 = 2\pi (3+x)^2 \Big|_{-2}^{0} = 16\pi(T) \approx 156960\pi(\text{í}) \approx 0,157\pi(\text{Ì í}).$$

Давление на нижнюю половину поверхности шара будет

$$P_2 = 2\pi(3+x)^2\Big|_0^2 = 32\pi(T) \approx 313920\pi(\text{í}) \approx 0,314\pi(\text{Ì í}).$$

Пример. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой H = 6 *м* и радиусом основания R = 2 *м*. Удельный вес масла $\delta = 0,9$.

Решение. Величина работы q, затрачиваемой на поднятие некоторого тела, зависит от высоты x его подъема: $q = Px$, P – вес тела.

Допустим, что работа, затраченная выкачивание из резервуара слоя масла толщиною x, рис. 2.3, есть некоторая функция *q(x)* и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении x на величину dx объем v слоя масла увеличится на величину

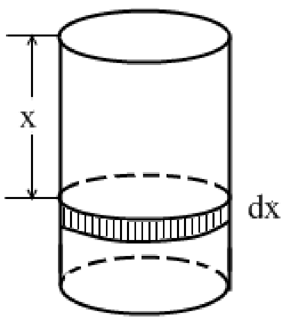


Рис. 2.3

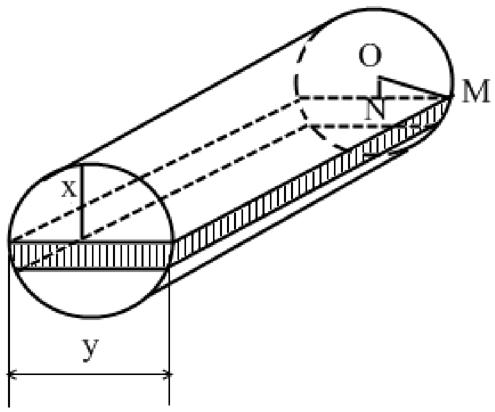


Рис. 2.4

$\Delta v = \pi R^2 dx$, его вес p увеличится на величину $\Delta p = \pi\delta R^2 dx$, а затраченная работа q увеличится на величину $\Delta q \approx \pi\delta R^2 x dx = dq$.

Всю искомую работу Q получим при изменении x от 0 до H. Поэтому

$$Q = \pi\delta R^2 \int_0^H x dx = \pi\delta R^2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^H = \frac{\pi\delta R^2 H^2}{2} \approx 64800\pi(\text{êÃì}) \approx 64800 \cdot 9,81\pi(\text{äæ}) \approx$$

$$\approx 635688\pi(\text{äæ}).$$ [1]

---

[1] Дж (Джоуль) – единица работы в Международной системе единиц СИ. *1 дж* $\approx 0,102$ *кГм; 1 кГм* $\approx 9,81$ *дж.*

Пример. При условиях предыдущей задачи вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из цилиндрического резервуара, если его ось имеет горизонтальное направление.

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, полагаем, что работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя масла толщиною *x*,

рис. 2.4, есть некоторая функция *q(x)* и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении *x* на величину *dx* объем *v* слоя масла увеличится на величину $\Delta v \approx Hydx = dv$, его вес *p* увеличится на величину $\Delta p \approx \delta Hydx = dp$, а затраченная работа *q* увеличится на величину $\Delta q \approx \delta Hyxdx = dq$.

Вся искомая работа *Q* выразится интегралом от *dq* в пределах от *x=0* до *x=2R:*

$$Q = \delta H \int_0^{2R} yxdx = 2\delta H \int_0^{2R} x\sqrt{R^2 - (x-R)^2}dx,$$

где переменная *y* выражена через переменную *x* из прямоугольного треугольника *ONM*.

Для вычисления этого интеграла полагаем $x - R = R\sin t$. Тогда $dx = R\cos tdt$;

$t = -\dfrac{\pi}{2}$ при $x = 0$; $t = \dfrac{\pi}{2}$ при $x = R$:

$$Q = 2\delta H \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R + R\sin t)R^2\cos^2 tdt = 2\delta HR^3\left(\int \cos^2 tdt + \int \cos^2 y\sin tdt\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 2\delta HR^3\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\delta HR^3 = 43200\pi(\text{êÃì }) \approx 423792\pi(\text{äæ }).$$

Пример. Определить работу, необходимую для запуска ракеты весом $P = 1{,}5\ T$ с поверхности земли на высоту *H* = 2000 *км*.

Решение. Сила F притяжения тела землей или вес тела зависит от его расстояния x до центра земли: $F(x) = \dfrac{\lambda}{x^2}$, где λ – постоянная.

Если *P* есть вес тела, когда оно находится на поверхности земли, т. е. на расстоянии земного радиуса *R* от центра земли, то $P = \dfrac{\lambda}{R^2}$, $\lambda = PR^2$ и сила *F*, преодолеваемая двигателем поднимающейся ракеты в момент, когда она находится на расстоянии *x* от центра земли, является известной функцией от *x:*

$$F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Полагая, что работа, совершаемая двигателем ракеты при подъеме ее на высоту *x*, есть некоторая функция *q(x)* и допуская, что при дальнейшем подъеме ракеты на малую высоту *dx* сила *F* остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta q \approx F(x)dx = \frac{PR^2}{x^2}dx = dq.$$

При подъеме ракеты с поверхности земли на высоту *H* переменная *x* изменяется от *R* до *R+H.* Поэтому искомая работа *Q* выражается интегралом

$$Q = \int_R^{R+H} F(x)dx = PR^2 \int_R^{R+H} \frac{dx}{x^2} = PR^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_R^{R+H} = \frac{PRH}{R+H}.$$

При $P = 1{,}5T$, $H = 2000\text{êì}$, $R = 6400\text{êì}$,

$Q \approx 2285714000\text{êÃì} \approx 22422854340\text{äæ}$.

Работу, которую должен совершить двигатель, чтобы полностью освободить ракету от земного притяжения, можно определить как предел работы *Q(H)* при неограниченном возрастании *H:*

$$\lim_{H\to\infty} Q(H) = \lim_{H\to\infty} \frac{PRH}{R+H} = \lim_{H\to\infty} \left[PR : \left(\frac{R}{H} + 1 \right) \right] = PR.$$

При указанных значениях *P* и *R* эта работа составит

9 600 000 000 *кГм* $\approx$ 94176 000 000 *дж.*

Пример. Цилиндр высотой *H* = 1,5 *м* и радиусом *R* = 0,4 *м,* наполненный газом под атмосферным давлением (10 330 *кГ/м*^{2}), закрыт поршнем. Определить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние *h* = 1,2 *м* внутрь цилиндра.

Решение. При изотермическом изменении состояния газа, когда его температура остается неизменной, зависимость между объемом v и давлением p газа выражается формулой *pv=c=const.* (Закон Бойля –Мариотта).Поэтому, если поршень будет вдвинут на x *м* внутрь цилиндра (рис. 5), то давление *p(x)* газа на единицу площади поршня будет $p(x)=\dfrac{c}{v(x)}=\dfrac{c}{S(H-x)}$, а давление на всю площадь S поршня будет

$$P(x)=Sp(x)=\frac{c}{H-x}.$$

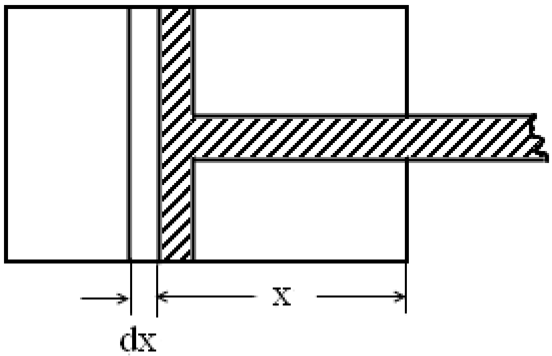


Рис. 2.5

Полагая, что работа, затрачиваемая при вдвижении поршня на x *м,* есть некоторая функция *q(x)*, и допуская, что при дальнейшем вдвижении поршня на малое расстояние dx испытываемое им давление *P(x)* остается неизменным, найдем приближенную величину приращения (дифференциал) функции *q(x)*:

$$\Delta q\approx P(x)dx=\frac{c}{H-x}dx=dq.$$

Всей искомой работе Q соответствует изменение x от 0 до h, поэтому

$$Q=c\int_0^h\frac{dx}{H-x}=-c\ln(H-x)\Big|_0^h=c\ln\frac{H}{H-h}.$$

При H = 1,5 *м,* R = 0,4 *м,* h = 1,2 *м,* $p_0=10330$ *кГ/м²* найдем $v_0=\pi R^2H=0,24\pi ì^{\,3}$; $c=p_0v_0=2479,2\pi$; $Q\approx 12533,3ê\tilde{A}ì\approx 122951,7äæ$.

Пример. При условиях предыдущей задачи определить работу адиабатического сжатия газа[2], при котором его объем v и давление p связаны соотношением $pv^k=c=const$ (закон Пуассона), где k – постоянная для данного газа величина, большая единицы. (Для воздуха $k\approx 1,4.$)

[2] В адиабатическом процессе температура газа меняется: при увеличении объема она понижается, а при уменьшении объема повышается.

Решение. Повторяя те же рассуждения и употребляя те же обозначения, как и в решении предыдущей задачи, найдем следующее выражение для дифференциала работы:

$$dq(x) = \frac{cdx}{S^{k-1}(H-x)^k}.$$

Интегрируя в пределах от $x = 0$ до $x = h$, получим всю искомую работу

$$Q = \frac{c}{S^{k-1}}\int_0^h \frac{dx}{(H-x)^k} = \frac{c}{S^{k-1}}\int_h^0 (H-x)^{-k}\,d(H-x) = \frac{c}{S^{k-1}}\frac{(H-x)^{1-k}}{1-k}\Bigg|_h^0 =$$

$$= \frac{p_0 {v_0}^k}{S^{k-1}(k-1)}\left[\frac{1}{(H-h)^{k-1}} - \frac{1}{H^{k-1}}\right] = = \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[\left(\frac{H}{H-h}\right)^{k-1} - 1\right].$$

Полагая H = 1,5 *м*, k = 1,4, найдем

$$Q \approx \frac{2479{,}2\pi}{0{,}4}\left[\left(\frac{1{,}5}{0{,}3}\right)^{0{,}4} - 1\right] \approx 17593{,}4\text{êÃì} \approx 172591{,}3\text{äæ}.$$

Сравнение этого результата с предыдущими показывает, что работа, затрачиваемая при адиабатическом сжатии газа, больше, чем при изотермическом.

Пример. Прямоугольный резервуар с площадью горизонтального сечения $S = 6\text{ì}^2$ наполнен водой до высоты H = 5 *м*. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью $s = 0{,}01\text{ì}^2$, если принять, что скорость истечения воды равна $0{,}6\sqrt{2gh}$, где h – высота уровня воды над отверстием, g – ускорение силы тяжести.

Решение. Согласно общей схеме (I) разобьем искомое время T на большое число n малых промежутков Δt_1, Δt_2, …, Δt_n, и пусть за каждый такой промежуток уровень воды в резервуаре понижается на величину $\Delta x = \dfrac{H}{n}$ (рис. 2.6).

Если допустить, что в течение каждого малого промежутка времени Δt_i скорость истечения воды через отверстие в дне остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка $0,6\sqrt{2g(H-x_i)}$, то, приравняв объем воды, вытекшей с такой скоростью через отверстие в дне за промежуток Δt_i, объему опорожнившейся за этот же промежуток части резервуара, получим приближенное равенство

$$0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}\Delta t_i \approx S\Delta x,$$

откуда

$$\Delta t_i \approx \frac{S\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}}.$$

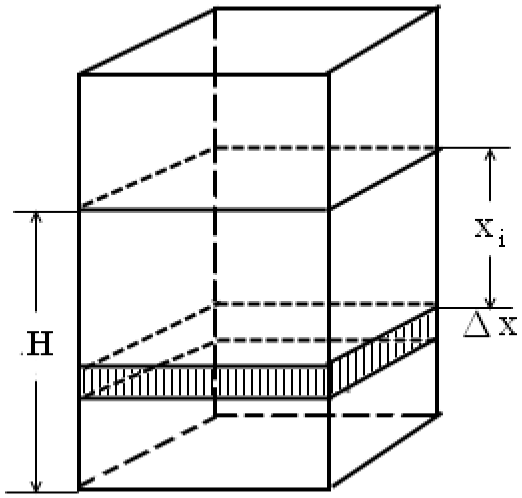


Рис. 2.6

Приближенное значение всего искомого времени T будет равно сумме

$$T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{S\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}}, \tag{2.2}$$

где по условию задачи точки x_i заключены на отрезке $[0,H]$.

Убедившись, что с возрастанием n погрешность полученного приближенного значения T стремится к нулю, найдем точное значение T как предел интегральной суммы (2.2) при $n\to+\infty$, т. е. как соответствующий определенный интеграл

$$T=\frac{S}{0,6s\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2S}{0,6s\sqrt{2g}}(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_H^0=\frac{S}{0,6s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Сопоставление этого результата с предыдущим показывает, что время истечения T, без возмещения убыли воды в резервуаре, в два раза больше времени истечения T_1, при постоянном возмещении убыли воды; $T=2T_1$.

Пример. При условиях предыдущей задачи определить, за какое время уровень воды в резервуаре изменится на h *м*, если сверху в него непрерывно будет протекать $V\ ì^{3}$ воды в секунду?

Решение. В этом случае за малый промежуток времени Δt объем воды в резервуаре изменится на величину

$$S\Delta x \approx \left[0,6s\sqrt{2g(H-x)}-V\right]\Delta t, \text{ откуда}$$

$$\Delta t \approx \frac{S\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x)}-V}=dt.$$

Интегрируя dt в пределах от $x = 0$ до $x = h$, найдем искомое время T_2, за которое уровень воды в резервуаре изменится на h*(м)*:

$$T_2 = a\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{H-x}-b}, \text{ где}$$

$$a=\frac{S}{0,6s\sqrt{2g}}, \qquad b=\frac{V}{0,6s\sqrt{2g}}.$$

Применяя подстановку $\sqrt{H-x}=z$, получим $dx=-2zdz;$ $z_1=\sqrt{H}$ при $x = 0;$ $z_2=\sqrt{H-h}$ при $x = h;$

$$T_2 = a\int_{z_1}^{z_2}\frac{-2zdz}{z-b}=2a\int_{z_1}^{z_2}\left(1+\frac{b}{z-b}\right)dz=2a(z+b\ln|z-b|)\Bigg|_{\sqrt{H-h}}^{\sqrt{H}}=$$

$$=2a\left(\sqrt{H}-\sqrt{H-h}+b\ln\left|\frac{\sqrt{H}-b}{\sqrt{H-h}-b}\right|\right).$$

Здесь изменение уровня воды в резервуаре может быть двояким. Если в начальный момент при $h = 0$ скорость притока воды V будет меньше скорости ее убывания из резервуара $0,6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды будет понижаться до тех пор, пока эти скорости не станут одинаковыми. После этого вода будет оставаться на постоянном уровне, меньшем первоначального уровня H на величину h_1, определяемую из уравнения $0,6s\sqrt{2g(H-h_1)}=V.$

Если же в начале процесса $V>0,6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды в резервуаре будет подниматься до тех пор, пока не превысит первоначальный уровень H на величину h_2, определяемую из уравнения

$$0,6s\sqrt{2g(H+h_2)}=V,$$

после чего уровень воды в резервуаре будет оставаться неизменным.

Пример. Два одинаковых сосуда имеют форму прямого круглого конуса с вертикальной осью; их расположение и размеры показаны на рис. 7. Оба сосуда наполнены водой и затем опорожняются через небольшие одинаковые круглые отверстия внизу.

Определить время опорожнения каждого сосуда и в какой момент времени вода в обоих сосудах будет на одном уровне, если их опорожнение началось одновременно.

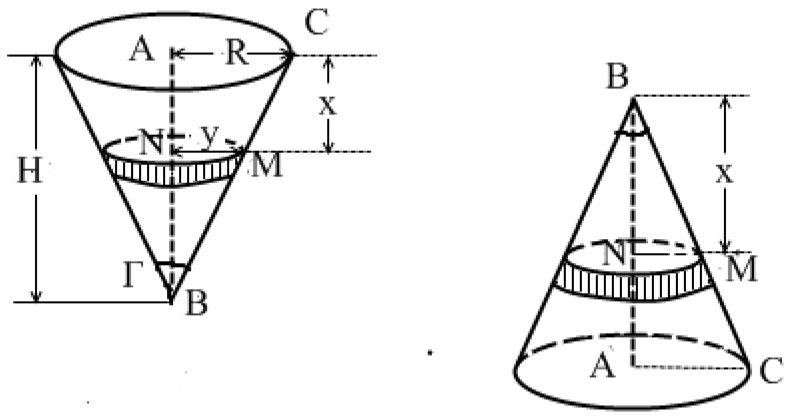


Рис. 2.7

Решение. Полагаем, что время *t*, за которое уровень воды в первом или во втором сосуде понизится на величину *x*, есть некоторая функция *t(x)* и найдем ее дифференциал *dt* при изменении *x* на величину *dx*.

Пусть понижению уровня воды в сосуде на малую величину *dx* соответствует малое приращение времени Δt. Тогда, допуская, что в течение этого малого промежутка времени вода вытекает из сосуда с постоянной скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2g(H-x)}$, найдем, что объем воды, вытекшей за время Δt через отверстие в дне площадью πr^2, будет $\Delta v \approx 0{,}6\pi r^2\sqrt{2g(H-x)}\Delta t$.

За это же время Δt объем воды в сосуде уменьшится на величину $\Delta v_1 \approx \pi y^2 dx$, которая должна быть равна объему вытекшей воды Δv. Отсюда, из равенства $\Delta v = \Delta v_1$, получим

$$\Delta t \approx \frac{y^2 dx}{0{,}6r^2\sqrt{2g(H-x)}} = dt.$$

Время T полного опорожнения первого или второго сосуда получим, интегрируя dt в пределах от $x = 0$ до $x = H$:

$$T = \frac{1}{0{,}6r^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{y^2 dx}{\sqrt{H-x}}.$$

Для вычисления этого интеграла выразим переменную y через переменную x. Из подобия треугольников ABC и NBM[3] имеем:

а. для первого сосуда $\dfrac{H}{R} = \dfrac{H-x}{y}$, $y = \dfrac{R}{H}(H-x)$;

б. для второго сосуда $\dfrac{H}{R} = \dfrac{x}{y}$; $y = \dfrac{R}{H}x$.

Поэтому время T_1 полного опорожнения первого сосуда будет

$$T_1 = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{(H-x)^2 dx}{\sqrt{H-x}} = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}} \cdot \frac{2(H-x)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_H^0 = \frac{2R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

Время T_2 полного опорожнения второго сосуда выражается интегралом

$$T_2 = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}}.$$

Вводя новую переменную $z = H - x$, имеем: $dx = -dz$; $z_1 = H$ при $x = 0$; $z_2 = 0$ при $x = H$;

$$\int_0^H \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}} = -\int_H^0 \frac{(H-z)^2}{\sqrt{z}} dz = \int_0^H (H^2 z^{-\frac{1}{2}} - 2Hz^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}) dz = \frac{16}{15} H^{\frac{5}{2}}.$$

Подставляя найденное значение интеграла, получим $T_2 = \dfrac{16R^2}{9r^2}\sqrt{\dfrac{H}{2g}}$.

Сопоставив T_2 и T_1, взяв их отношение $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{8}{3}$, заключаем, что первый сосуд опорожняется значительно (почти в три раза) быстрее второго. При этом, если опорожнение сосудов начинается одновременно, то в начале процесса уровень воды в первом сосуде будет выше, чем во втором, затем наступит момент, когда

[3] Здесь вследствие малости r по сравнению с другими размерами сосуда и для упрощения вычислений допускается, что осевое сечение сосуда представляет треугольник, а не трапецию.

уровни воды в обоих сосудах сравняются, после чего уровень воды в первом сосуде будет неизменно и все более ниже, чем во втором.

Для определения времени, спустя которое после начала одновременного опорожнения сосудов вода в них будет на одном уровне, найдем зависимость времени t истечения воды от величины x понижения ее уровня для каждого сосуда.

Интегрируя dt в пределах от $x=0$ до $x=x$, получим:

а. для первого сосуда

$$t=b\int_0^x (H-x)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}b(H-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_x^0=\frac{2}{5}b\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right],\ \text{где}\ b=\frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}};$$

б. для второго сосуда

$$t=b\int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{H-x}}dx=b\int_{H-x}^{H}\left(H^2z^{-\frac{1}{2}}-2Hz^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{3}{2}}\right)dz==b\left(2H^2z^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}Hz^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{H-x}^{H}=$$

$$=b\left\{2H^2\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\frac{4}{3}H\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}.$$

Рассматривая полученные зависимости t от x для первого и второго сосудов как уравнения с искомыми неизвестными t и x, и решая их как систему (исключая t), найдем:

$$\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right]=2H^2\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\frac{4}{3}H\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right];$$

$$H\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\frac{2}{3}\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]=0;$$

$$\sqrt{H-x}(H+2x)=\sqrt{H^3};\quad 3H^2-4x^2=0;\quad x=\frac{H\sqrt{3}}{2}.$$

По найденному значению x из первого (или второго) уравнения определяем t:

$$t=\frac{2}{5}bH^{\frac{5}{2}}\left[1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right].$$

По истечении этого промежутка времени t после начала одновременного опорожнения обоих сосудов вода в них будет на одном уровне

$$h = H - x = H\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}15H.$$

Пример. Определить массу шара произвольного радиуса r, если плотность в каждой его точке пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

Решение. Пусть масса шара произвольного радиуса x есть некоторая функция $m(x)$.

При увеличении x на малую величину dx объем v этого шара увеличится на величину Δv, равную разности объемов шаров с радиусами x и $x + dx$:

$$\Delta v = \frac{4}{3}\pi\left[(x+dx)^3 - x^3\right] = \frac{4}{3}\pi(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3) \approx 4\pi x^2 dx = dv.$$

Допуская, что во всех точках малого объема dv плотность остается неизменной и равной kx, найдем приближенную величину его массы $dm = kxdv = 4k\pi x^3 dx$.

Искомую массу M шара радиуса r получим, интегрируя dm в пределах от $x = 0$ до $x = r$:

$$M = 4k\pi\int_0^r x^3dx = k\pi x^4\Big|_0^r = k\pi r^4.$$

Пример. Электрические заряды отталкиваются друг от друга с силой $\frac{e_1e_2}{r}$, где e_1 и e_2 – величины зарядов, а r – расстояние между ними. Определить работу, необходимую для того, чтобы приблизить заряд $e_2 = 1$ к заряду e_1 из бесконечности на расстояние, равное R.

Решение. Элементарная работа dA равна произведению силы на элементарное перемещение и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения: $dA = F\cos\alpha dr$. В рассматриваемом случае имеем

$dA = F_2 \cos \pi dr = -F_2 dr = -\frac{e_1}{r^2} dr$, т. к. $F_2 = \frac{e_1}{r^2}$. Согласно общей схеме применения интеграла, находим: $A = -e_1 \int\limits_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} = \frac{e_1}{r^2} \Big|_{\infty}^{R} = \frac{e_1}{R}.$

2.3. Вычисление статических моментов, моментов инерции, координат центра тяжести плоских кривых и фигур

Пусть $\{M_j(x_j, y_j)\}$ – система материальных точек плоскости xOy с массами m_j, $j = \overline{1,n}$. Величины $M_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j$, $I_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2$, называются соответственно *статическим моментом и моментом инерции* этой системы точек относительно оси Ox.

Если на гладкой кривой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), a \le x \le b\}$ равномерно распределена масса с линейной плотностью $\mu \equiv 1$, то статическими моментами и моментами инерции кривой γ относительно осей координат называются соответственно величины

$$M_x = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx, \quad M_y = \int\limits_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx, \tag{2.3}$$

$$I_x = \int\limits_a^b f^2(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx, \quad I_y = \int\limits_a^b x^2\sqrt{1 + f'(x)^2}dx, \tag{2.4}$$

а координаты ее центра тяжести $C(\xi, \eta)$ вычисляются по формулам

$$\xi = \frac{M_y}{l}, \qquad \eta = \frac{M_x}{l}, \tag{2.5}$$

где l – длина кривой γ.

Предположим, что криволинейная трапеция Φ лежит по одну сторону оси Ox и что она однородна. Статическими моментами и моментами инерции этой трапеции относительно осей Ox и Oy называются соответственно величины

$$M_x = \frac{\operatorname{sgn} f(x)}{2}\int_a^b f^2(x)dx,\ M_y = \operatorname{sgn} f(x)\int_a^b xf(x)dx, \tag{2.6}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^2(x)\left|f(x)\right|dx,\ I_y = \int_a^b x^2\left|f(x)\right|dx \tag{2.7}$$

а координаты ее центра тяжести $C(\xi,\eta)$ вычисляются по формулам

$$\xi = \frac{M_y}{P}, \qquad \eta = \frac{M_x}{P} \tag{2.8}$$

где P – площадь трапеции.

Если плоская однородная фигура имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси.

Примеры вычисления координат центра тяжести и моментов инерции

Пример. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры

$$\Phi = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, 0\le x\le a, 0\le y\le b\right\}.$$

Решение. Применяя последовательно формулы (2.6) и (2.8), получим

$$M_x = \frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{b^2}{2}\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ab^2}{3},$$

$$M_y = b\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{ba^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^0 = \frac{a^2b}{3},$$

$$\xi = M_y : \frac{\pi ab}{4} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = M_x : \frac{\pi ab}{4} = \frac{4b}{3\pi}$$

(поскольку площадь фигуры Φ равна $\frac{\pi ab}{4}$).

Пример. Найти моменты инерции I_x и I_y параболического сегмента Φ, ограниченного графиком функции $f(x) = \frac{2ax-x^2}{a}$, $0\le x\le 2a$, и отрезком оси Ox.

Решение. Согласно формулам (2.7), имеем

$$I_x = \frac{1}{3a^2}\int_0^{2a}(2ax - x^2)^3 dx = \frac{32}{105}a^4, \; I_y = \int_0^{2a} x^2(2x - \frac{x^2}{a})dx = \frac{8}{5}a^4.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие для вузов. – СПб.: Изд-во «Лань», Изд-во «Специальная литература», 2000. – 448 с.

2. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике для вузов и втузов / М.Я. Выгодский. – М.: «Джангар», «Большая медведица», 2000. – 864 с.

3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Московского ун-та, изд-во ЧеРо, 1997. – 624 с.

4. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1966. – 460 с.

5. Максутов, И.А. Физика. Ч.1. Учебное пособие для дистанционного обучения / И.А. Максутов. – Челябинск, Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 80 с.

6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / под общ. ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1995. – 364 с.

7. Тарасов Н.П. Курс высшей математики для техникумов / Н.П. Тарасов. – М.: Изд-во «Наука», 1967. – 448 с.

8. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: Учеб. пособие для втузов / В.С. Шипачев. под ред. акад. А.Н. Тихонова. – М.: Высш. шк., 1989. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ