Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Вычислительная математика и высокопроизводительные вычисления»

517.5(07)
К665

М.Е. Коржова, Б.А. Марков

# КУРС КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2016

УДК 517.53(075.8)
К665

*Одобрено*
*учебно-методической комиссией*
*факультета вычислительной математики и информатики*

*Рецензенты:*
*В.И. Ухоботов, М.М. Кипнис*

**Коржова, М.Е.**
К665 Курс комплексного анализа**:** учебное пособие / М.Е. Коржова, Б.А. Марков. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 100 с.

В учебном пособии приведены основные понятия, определения, теоремы с иллюстрациями курса комплексного анализа. В каждый раздел включено достаточное количество примеров с подробным описанием решения каждого из них, а также вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов по направлению подготовки 02.03.03 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

УДК 517.53(075.8)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит изложение такого раздела математического анализа, как комплексный анализ и предназначен для студентов по направлению подготовки 02.03.03 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Весь материал разбит на шесть глав. Первая глава посвящена основным понятиям и определениям функций комплексного переменного. В последующих главах изучаются степенные ряды и ряды Лорана. Основное внимание в третьей главе посвящено аналитическому продолжению. В пятой главе пособия излагаются начала теории конформных отображений. Замыкает пособие шестая глава, в которой приводятся элементы операционного вычисления. Намечены пути приложения развитой теории к решению дифференциальных и интегральных уравнений.

Каждая глава содержит подробное решение типовых задач и примеры иллюстративного характера. Также приведены вопросы для самоконтроля с заданиями для самостоятельной работы студентов.

## 1. Основные понятия теории функций комплексного переменного

В настоящем разделе мы познакомимся с основными видами записи комплексных чисел. Таковых существует четыре. Это – координатная, алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.

### *Координатная форма записи комплексного числа*

**Определение.** *Комплексное число* $z$ – это пара вещественных чисел $x$ и $y$, записанных через точку с запятой: $z=(x;y)$.

Первое из этих чисел – $x$ – называется *вещественной (или действительной) частью комплексного числа*, второе число – вещественное число $y$ – называется *мнимой частью комплексного числа*.

Для вещественной и мнимой частей вводятся следующие обозначения соответственно: $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$, где $z=(x;y)$.

**Определение**. Число $z$ называется *чисто вещественным*, если его мнимая часть равна нулю.

**Определение**. Число $z$ называется *чисто мнимым*, если его вещественная часть равна нулю.

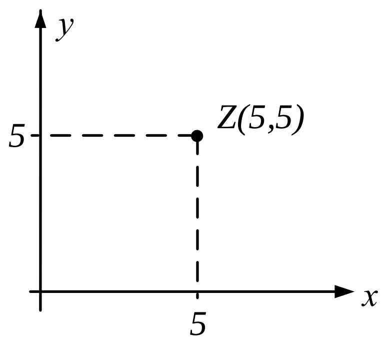



Рис. 1. Комплексное число $Z(5;5)$ на комплексной плоскости

Комплексное число отмечают на комплексной плоскости так, как если бы это была обычная точка плоскости. При этом вещественная часть числа объявляется координатой точки по оси абсцисс, а мнимая – координатой по оси ординат. Сама плоскость, представляющая собой множество всех возможных комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью*, её ось ординат – *мнимая ось комплексной плоскости* (рис. 1).

Сама комплексная плоскость обозначается обычно буквой $z$, всё множество комплексных чисел обозначается как $\mathbb{C}$ .

### *Арифметическая форма записи комплексного числа*

**Определение.** Комплексное число $z=(x;y)$ называется *суммой двух комплексных чисел* $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$, $z=z_1+z_2$, если $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$.

Несложно видеть, что сумма двух комплексных чисел получатся с помощью простого сложения вещественных и мнимых частей складываемых чисел (рис. 2).

Представляется разумным ввести вычитание аналогично:

**Определение.** Комплексное число $z=(x;y)$ называется *разностью двух комплексных чисел* $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$, $z=z_1-z_2$, если $x=x_1-x_2$, $y=y_1-y_2$ (рис. 3).

Возвращаясь к аналогии с точками на плоскости, заметим, что аналогия сохраняется: комплексное число на плоскости можно уподобить радиус-вектору (то есть такому вектору, начало которого находится в начале координат, а конец – в данной точке); тогда сумма и разность комплексных чисел будут соответствовать векторным сумме и разности.

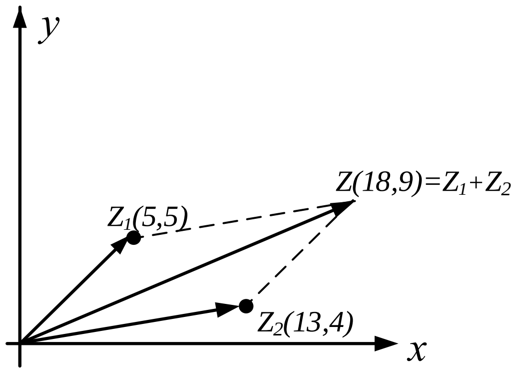



Рис. 2. Сложение комплексных чисел как векторов (строится по правилу параллелограмма)

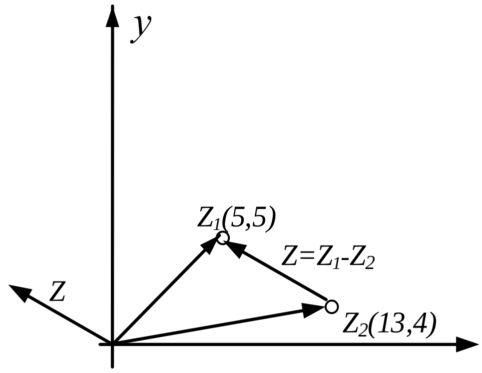



Рис. 3. Вычитание комплексных чисел (пустые кружки, строится с помощью правила треугольника)

Теперь дополнительно введём операцию умножения комплексного числа на вещественное число:

**Определение**. Если $z=(x;y)$, а $\lambda-$ вещественное число, то $\lambda z=(\lambda x;\lambda y)$.

То есть умножение осуществляется умножением вещественной и мнимой части комплексного числа $z$ на вещественное число $\lambda$.

Заметим, что и эта операция вполне соответствует векторной аналогии: если мы радиус-вектор умножаем на вещественное число $\lambda$, то получаем вектор, длина которого в $|\lambda|$ раз больше.

Теперь попробуем применить предложенные операции к комплексному числу.

Пусть есть $z=(x;y)$. Можно его представить так: $z=(x;y)=(x;0)+(0;y)$ по правилу сложения комплексных чисел. Теперь воспользуемся умножением: $(x;0)=(x\cdot 1;x\cdot 0)=x\cdot(1;0)$ и $(0;y)=(0\cdot y;1\cdot y)=(0;1)\cdot y$. Используя эти два результата, получим: $z=(x;y)=x(1;0)+y(0;1)$.

**Определение.** Число $(1;0)$ называется *вещественной единицей* и обозначается 1, число $(0;1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается как $i$.

Соответственно, с помощью новых обозначений можно записать результат наших вычислений как: $z=(x;y)=x(1;0)+y(0;1)=x+iy$.

**Определение.** Представление комплексного числа $z=(x;y)$ в виде $z=x+iy$ называется *алгебраической формой записи комплексного числа*.

**Определение.** Число $z=(x;y)$ называется *произведением двух комплексных чисел* $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$, если $x=x_1x_2-y_1y_2$, $y=x_1y_2+x_2y_1$.

Опираясь на операцию умножения, покажем, что произведение комплексной единицы самой на себя даёт вещественное число $-1$.

Действительно, $(0;1)\cdot(0;1)=(0\cdot0-1\cdot1;0\cdot1-0\cdot1)=(-1;0)=-1$. Таким образом, $i^2=-1$.

Аналогия между умножением векторов и комплексных чисел в данном случае не верна: произведение комплексных чисел для векторов аналогов не имеет – по крайней мере, нет известных аналогов.

### *Комплексные числа в полярной системе координат*

Мы ранее показывали аналогию декартовой системы координат и комплексных чисел. На практике часто бывает удобно пользоваться не декартовой системой координат, а полярной. В полярной системе координат вместо проекций точки на оси системы координат используется расстояние от начала координат (полярный радиус) и угол, который радиус-вектор составляет с положительным направлением оси абсцисс.

Такие же характеристики можно ввести и на плоскости.

**Определение.** *Модулем комплексного числа* $z=(x;y)$ называется число, равное $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 4).

Несложно видеть, что модуль играет роль расстояния от точки $z=(x;y)$ комплексной плоскости до начала координат. Действительно, $x$ и $y$ – проекции точки на оси $OX$ и $OY$. Вместе с радиус-вектором проекции образуют прямоугольный треугольник (см. рис. 4).

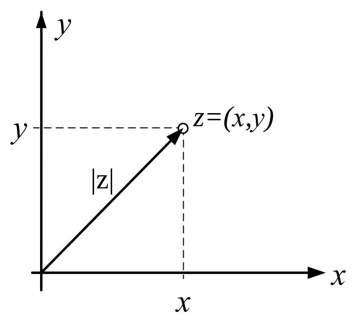


Рис. 4. Модуль комплексного числа $|z|$

Следовательно, $|z|$ – длина радиус-вектора – она же гипотенуза, а катеты имеют длины $x$ и $y$. Таким образом, $|z|$ – расстояние от $z=(x;y)$ до начала координат.

### *Тригонометрическая форма записи комплексного числа*

**Определение.** *Главным значением аргумента* $\arg z$ комплексного числа $z=(x;y)$ называется угол между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором точки на комплексной плоскости.

Угол отмеряется против часовой стрелки; если же угол отмерять по часовой стрелке, то есть в обратном направлении, то такой угол будет отрицателен (рис. 5).

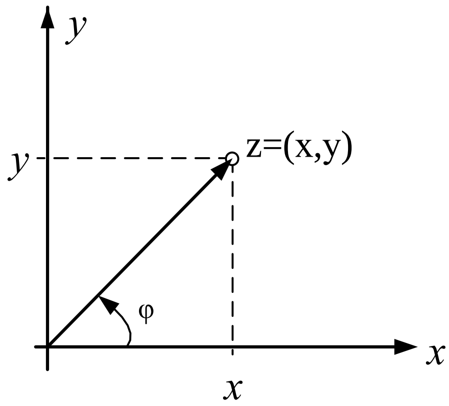



Рис. 5. Главное значение аргумента комплексного числа $\arg z \equiv \varphi$

Для вычисления аргумента можно использовать формулу, выбор строки в которой определяется расположением точки, соответствующей $z=(x;y)$ в той или иной четверти комплексной плоскости:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & z \in I \text{ четверти} \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & z \in II \text{ или } III \text{ четверти} \\ 2\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & z \in IV \text{ четверти} \end{cases}$$

Аргумент соответствует полярному углу $\varphi$.

**Определение.** *Аргументом комплексного числа* $z=(x;y)$ $Arg\,z$ называется величина: $Arg\,z = \arg z + 2\pi k$, где $k-$ произвольное целое число.

**Пример**. Вычислить аргумент числа $\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

*Решение.* Число, как несложно видеть, расположено в четвёртой четверти. Следовательно, $\varphi = 2\pi + arctg\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\right) = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Теперь рассмотрим следующее преобразование. Пусть есть точка $z=(x;y)=x+iy$. Вынесем за скобки модуль комплексного числа $|z|$: $z = x+iy = |z|\left\{\dfrac{x}{|z|} + i\dfrac{y}{|z|}\right\}$. В полярной системе координат с полярным радиусом $\rho$ для декартовых координат $x$ и $y$ справедливо $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Ранее мы уже отмечали, что модуль комплексного числа играет роль полярного радиуса, поэтому $x=\rho\cos\varphi=|z|\cos(\arg z)$, $y=\rho\sin\varphi=|z|\sin(\arg z)$. Следовательно,

$$z=x+iy=|z|\left\{\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right\}=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

**Определение**. Число $z$, записанное в виде $z=|z|(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z))$, называется *тригонометрической формой комплексного числа* $z=(x;y)=x+iy$.

### *Показательная форма записи комплексного числа*

Леонардом Эйлером были получены формулы, связывающие тригонометрические функции, показательную функцию и комплексную единицу: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ и $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$. Доказательства как первой, так и второй формул Эйлера будут проведены ниже; в настоящий момент ограничимся замечанием, что $(\cos\varphi+i\sin\varphi)=e^{i\varphi}$. Следовательно, $z=|z|(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z))=|z|e^{i\arg z}$.

**Определение.** Число $z$, записанное в виде: $z=|z|e^{i\arg z}$ или $z=|z|e^{iArg\,z}$ называется *показательной формой комплексного числа.*

Заметим, что вычисления, проводимые с комплексными числами, удобно проводить, используя разные формы записи чисел. Так, сложение и вычитание удобно проводить, используя алгебраическую или координатную формы записи. Деление или умножение удобнее всего вести в показательно форме.

Действительно, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|e^{i\varphi_1}}{|z_2|e^{i\varphi_2}}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ – модули чисел делятся, а аргументы вычитаются. При умножении, как это несложно установить, модули перемножаются, а аргументы будут сложены: $z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

При действиях с комплексными числами широко используется операция комплексного сопряжения $z^*$.

**Определение**. Число $z^*=(x;-y)$ называется *комплексно-сопряжённым* числу $z=(x;y)$.

Из свойств комплексного сопряжения можно отметить, что

1. $zz^*=|z|^2$, т.к. $zz^*=(x+iy)(x-iy)=x^2+ixy-ixy-i^2y^2=x^2+y^2=|z|^2$;
2. $\arg z=-\arg z^*$.

Операцию комплексного сопряжения удобно использовать при делении комплексных чисел.

Действительно, пусть нужно вычислить $\frac{z_1}{z_2}$. Избавимся от комплексности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель на $z_2^*$: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}$. В результате наших действий получается число с вещественным знаменателем.

**Пример**. Вычислить $\frac{1+i}{3+4i}$.

*Решение.* Домножаем на сопряжённое знаменателю и выполняем действия: $\frac{1+i}{3+4i} = \frac{1+i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3+3i-4i+4}{9+16} = \frac{7-i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i = \left(\frac{7}{25}; -\frac{1}{25}\right)$.

**1. Вопросы для самоконтроля**:

1. Что такое комплексная плоскость?
2. Как может быть отмечено число на комплексной плоскости?
3. Что такое мнимая и действительная части комплексного числа? Как они обозначаются?
4. Как можно выполнять арифметические действия (сложение, вычитание, умножение, деление) с комплексными числами?
5. Какое число называется комплексной единицей?
6. Что такое модуль комплексного числа? Что такое аргумент комплексного числа? Как эти понятия связаны с комплексной плоскостью?
7. Что такое координатная запись комплексного числа?
8. Какая запись комплексного числа называется алгебраической? Как связана координатная запись комплексного числа с алгебраической?
9. Как получить показательную запись комплексного числа?
10. Что такое тригонометрическая форма комплексного числа?

**2. Выполните арифметические действия с комплексными числами и изобразите их на комплексной плоскости:**

| | | |
|---|---|---|
| 1. $z_1 = (1;2)$, $z_2 = (-3;1)$ | 2. $z_1 = \left(-\sqrt{2}; 3\right)$, $z_2 = \left(-3; \sqrt{5}\right)$ | 3. $z_1 = (\pi; 2)$, $z_2 = \left(-1; -2e^2\right)$ |
| 4. $z_1 = (-e; 2\pi)$, $z_2 = \left(\sqrt{5}; 2\right)$ | 5. $z_1 = (-2;1)$, $z_2 = (-2;3)$ | 6. $z_1 = \left(\frac{1}{2}; 0,7\right)$, $z_2 = \left(\sqrt{1,21}; -2,3\right)$. |

**3. Вычислите модуль и аргумент комплексных чисел, отметьте их на комплексной плоскости. Представьте эти числа в показательной форме:**

| | | |
|---|---|---|
| 7. $z=(1;2)$; | 8. $z=\left(1;-\sqrt{2}\right)$; | 9. $z=\left(\sqrt{3};-1\right)$; |
| 10. $z=\left(-\sqrt{3};-1\right)$; | 11. $z=\left(1;-\sqrt{3}\right)$; | 12. $z=(1;-1)$. |

**Пример.** Даны числа в показательной форме. Используя тригонометрическую запись, перепишите их в координатной форме.

*Решение.* Пусть дано число: $z=\sqrt{2}\exp\left(-\dfrac{3\pi}{4}i\right)$. Представим его в алгебраической форме. Для этого воспользуемся формулой Эйлера и представим показательную форму в виде: $z=|z|\exp(i\varphi)=|z|\{\cos\varphi+i\sin\varphi\}=|z|\cos\varphi+i|z|\sin\varphi$. Далее, используя связь алгебраической и координатной форм, получим:

$$z=|z|\cos\varphi+i|z|\sin\varphi=(|z|\cos\varphi;|z|\sin\varphi).$$

В нашем примере $|z|=\sqrt{2}$, аргумент $\varphi=-\dfrac{3}{4}\pi$. Следовательно, пользуясь формулой для расчётов, получаем, что

$$z=(|z|\cos\varphi;|z|\sin\varphi)=\left(\sqrt{2}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right);\sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\left(\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=$$
$$=(-1;-1).$$

**4. Найдите модуль и аргумент комплексных чисел. Представьте заданные числа в координатной и алгебраической форме. Изобразите числа на координатной плоскости:**

| | | |
|---|---|---|
| 13. $z=e^{i\pi}$; | 14. $z=e^{\frac{\pi i}{2}}$; | 15. $z=e^{-i\frac{\pi}{2}}$; |
| 16. $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; | 17. $z=2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$; | 18. $z=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. |

**5. Выполните деление в каждом из случаев:**

| | | |
|---|---|---|
| 19. $\dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$; | 20. $\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+2i}$; | 21. $\dfrac{i+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; |
| 22. $\dfrac{1+\sqrt{5}i}{i\pi-2}$; | 23. $\dfrac{1}{i}$; | 24. $\dfrac{i+1}{-1+i}$. |

Тем не менее, проще выполнять деление и возведение в степень, используя показательную форму.

**Пример.** Поделить числа $\dfrac{(1;1)}{\left(-\sqrt{3};1\right)}$.

*Решение.* Для решения этой задачи переведём комплексные числа числителя и знаменателя в показательную форму:

$$\frac{(1;1)}{\left(-\sqrt{3};1\right)}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{2\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{12}-i\frac{8\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

Таким образом, все действия были проведены с показательной формой. Осталось только перевести показательную форму в алгебраическую:

$$\frac{(1;1)}{\left(-\sqrt{3};1\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-i\frac{5\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

**Пример**. Возвести число в большую степень, например, $\left(\sqrt{3};1\right)^{12}$.

*Решение.* Перейдём к показательной форме. $\left(\sqrt{3};1\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Полученное число несложно возвести в двенадцатую степень, не прибегая к утомительным вычислениям:

$$\left(\sqrt{3};1\right)^{12}=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12}=2^{12}\cdot e^{12i\frac{\pi}{6}}=4096\cdot e^{2i\pi}=4096\left(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\right)=4096.$$

**6. Выполните деление, используя показательную форму:**

| | | |
|---|---|---|
| 25. $\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$; | 26. $\frac{i+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; | 27. $\frac{1}{i}$; |
| 28. $(1-i)^5$; | 29. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-3}$; | 30. $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$. |

### *Корни алгебраических уравнений*

Последний тип задач данной темы – вычисление корней уравнений. Здесь необходимо учитывать, что аргумент комплексного числа, вообще говоря, всегда «большой», то есть определяется формулой $Arg\,z=\arg z+2\pi n,\ n\in Z$, где номер $n$ может быть любым целым числом.

Вычисление корня соответствует умножению показателя степени на соответствующую степени корня дробь. При этом оказывается, что разным значениям номера $n$ будут соответствовать разные корни.

**Пример**. Решите уравнение: $z^3=-1$.

*Решение.* Перейдём в правой части уравнения к показательной форме: $-1=e^{i\pi}$, а с учётом большого аргумента: $-1=e^{i\pi+2i\pi n}$.

В результате получаем уравнение: $z^3=e^{i\pi+2i\pi n}$.

Извлекаем корень. $z=\sqrt[3]{e^{i\pi+2i\pi n}}=e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{2\pi n}{3}}$.

Заметим, что уравнение было третьей степени, следовательно, корней будет тоже три. Каждому из корней будет соответствовать тот или иной номер $n$. Поэтому целесообразно взять три подряд идущих любых целых числа. Мы возьмём с этой целью числа $n = 0, 1, 2$ и получим три корня:

$$z_{n=0} = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{2\pi n}{3}}\Bigg|_{n=0} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_{n=1} = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{2\pi n}{3}}\Bigg|_{n=1} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1.$$

$$z_{n=2} = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{2\pi n}{3}}\Bigg|_{n=2} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**7. Решить уравнения, найдя все корни:**

| | | |
|---|---|---|
| 31. $z^3 - 1 = 0$; | 32. $z^4 - 16 = 0$; | 33. $z^2 + z + i = 0$; |
| 34. $z^4 + z^2 - 2 = 0$; | 35. $z^3 = \dfrac{1}{i}$; | 36. $z^2 = \left(1; \sqrt{3}\right)$. |

**Определение.** Пусть есть некоторое комплексное число $z_0$ – пара вещественных чисел $x$ и $y$, которую мы можем представить точкой на комплексной плоскости. Её $\varepsilon$*-окрестностью* назовём множество таких чисел $z$, что будут удовлетворять условию: модуль разности между числами $z_0$ и $z$ меньше, чем число $\varepsilon > 0$: $|z - z_0| < \varepsilon$.

Такое множество представляет собой круг с центром в точке $z_0$ и радиуса $\varepsilon$, из которого выброшена ограничивающая его окружность. Пример $\varepsilon$-окрестности приведён на рисунке 6.

**Определение.** Пусть есть некоторое множество точек комплексной плоскости $E$. Точку $z$ будем считать *внутренней точкой этого множества*, если есть такая $\varepsilon$-окрестность точки $z$, что все точки из этой окрестности принадлежат множеству $E$.

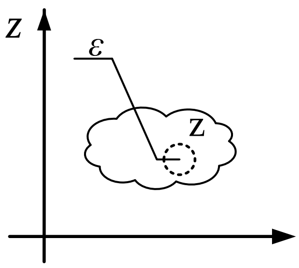


Рис. 6. $\varepsilon$-окрестность

Несложно определить внешнюю и граничные точки: внешней будет точка, у которой существует такая $\varepsilon$-окрестность, что все точки из этой окрестности множеству $E$ не принадлежат, а граничная – такая точка, что в любой её окрестности есть как точки, принадлежащие множеству $E$, так и не принадлежащие множеству $E$. Соответственно, граница множества $E$ – множество $\partial E$ – совокупность всех граничных точек множества $E$.

**Определение.** Множество $D$ называется *областью*, если:

1. Каждая точка этого множества – внутренняя

2. Любые две различные точки $z_1$ и $z_2$ этого множества можно соединить ломаной линией, целиком принадлежащей множеству $D$ (это

свойство принято называть односвязностью области $D$). В противном случае область называется неодносвязной (рис. 7, 8).

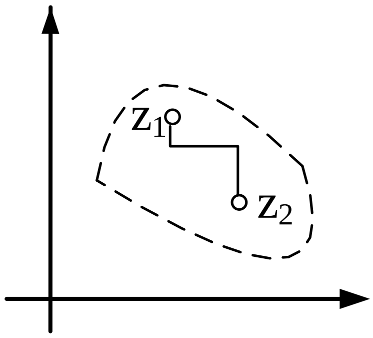



Рис. 7. Односвязная область

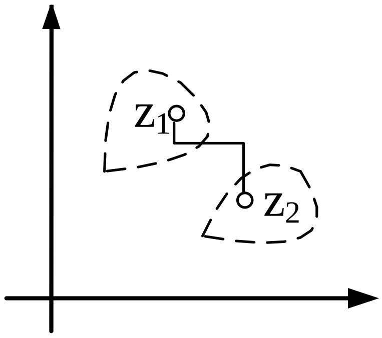



Рис. 8. Неодносвязная область

Далее нам потребуется *замкнутая область* $\bar{D}$: это область $D$ с добавленной границей $\partial D$.

Области могут быть *ограниченными* (то есть такими, что существует круг конечного радиуса, внутри которого область помещается целиком) и *неограниченными* – то есть такими, что не существует круга конечного радиуса, в котором область уместилась бы целиком. Например, это – вся комплексная плоскость.

Мы далее будем задавать функцию либо на области $D$, либо на замкнутой области $\bar{D}$.

Итак, функция комплексного переменного $f(z)$ ставит в соответствие одним комплексным числам в соответствие другие комплексные числа. Это значит, что функция должна задавать как чисто мнимую часть числа, так и чисто вещественную. Получается, что в функции комплексного переменного можно выделить две функции: одна отвечает за вещественную часть получающегося комплексного числа, вторая – за мнимую часть комплексного числа.

Обозначим вещественную часть функции комплексного переменного $f(z)$ как $u(x,y)$ – вещественную функцию двух переменных, $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$, а мнимую – $v(x,y)$ – тоже вещественную функцию двух переменных, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$. В результате функция комплексного переменного может быть представлена как сумма её вещественной и мнимой частей: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Задав функцию $f(z)$ в некоторой области $D$, мы получим множество значений $G$ этой функции, или всякая точка $z\in D$ будет отображена на некоторую точку $w$ множества $G$.

В зависимости от того, каким будет множество $G$, можно определить свойства этого отображения. Если среди чисел $G$ нет одинаковых, то говорят, что функция $f(z)$ является однолистной в области $D$. В этом случае мы можем определить и обратную функцию: $z=\varphi(w)$. Сделать это можно так: раз у нас есть число $z$ и соответствующее ему $w$, и среди $w$ нет совпадающих, то несложно определить и обратное отображение: $w$ соответствует то самое число $z$, которому при отображении соответствовало $w$.

**Определение**. Функция $f(z)$ называется *однолистной в области* $D$, если в разных точках этой области она принимает разные значения.

Приведём пример функции, которая не является однолистной.

**Пример.** $w=z^2$. Несложно видеть, что на всей комплексной плоскости эта функция однолистна не будет. Действительно, возьмём два разных числа комплексной плоскости: $z_1=-i$ и $z_2=+i$. Несложно видеть, что $z_1 \neq z_2$. Но $w_1=z_1^2=(-i)^2=-1$ и $w_2=z_2^2=(+i)^2=-1$ – совпадают, $f(z_1)=f(z_2)$. Таким образом, мы наглядно показали, что функция $w=z^2$ на всей комплексной плоскости не будет однолистной.

Однако у неоднолистной функции неоднозначность проявляется в достаточно необычно. Чтобы его проиллюстрировать, сделаем следующее: возьмём точку $z=0$ на комплексной плоскости $Z$, и окружим её замкнутым контуром – скажем, окружностью радиуса 1 (рис. 9).

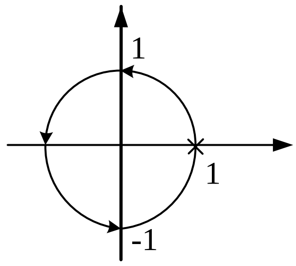


Рис. 9. Обход контура по окружности радиуса 1

Выберем для начала движения точку $z=(1;0)$ – она на рисунке отмечена небольшим крестиком – и будем двигаться из этой точки против часовой стрелке по окружности. В каждой новой точке будем рассматривать аргумент функции.

Если в точке $z=(1;0)$ аргумент $\arg w=\arg z^2$ был равен нулю, то в точке $z=(0;1)$ аргумент будет $\arg w=\pi$, в точке $z=(-1;0)$ $\arg w=2\pi$, в точке $z=(0;-1)$ $\arg w=3\pi$, а когда мы подойдём вновь к точке $z=(0;1)$, то аргумент будет равен $4\pi$. Это означает, что обойдя вкруг точку ветвления, мы получим скачок аргумента функции. Заметим, что если внутрь замкнутого контура точка ветвления не попадает, то и скачка аргумента не будет. В этом легко убедиться, обойдя по замкнутому контуру произвольной формы любую из других точек плоскости (контур не должен включать начала координат, т.е. точки ветвления). Точку, при обходе которой аргумент испытывает скачок, назовём *точкой ветвления*.

Чтобы избежать неоднолистности функции, разделим всю комплексную плоскость на две части: скажем, верхнюю полуплоскость и нижнюю полуплоскость. В этом случае в каждой из двух полученных неограниченных областей для функции $w = z^2$ можно поставить в соответствие обратную функцию. В верхней полуплоскости это будет $w = +\sqrt{z}$, в нижней – $w = -\sqrt{z}$. Эти функции называются *ветвями функции*, обратной $z^2$.

**Определение.** Если для точки $z_0$ можно указать такую $\varepsilon$-окрестность, что при однократном обходе точки $z_0$ по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в этой $\varepsilon$-окрестности, одна ветвь многозначной функции переходит в другую, то точка $z_0$ называется *точкой разветвления (ветвления) функции.*

Теперь рассмотрим функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Они являются обычными вещественными функциями двух вещественных переменных. Тогда они обладают и всеми свойствами вещественных функций – например, непрерывностью и дифференцируемостью.

Следовательно, можно попытаться использовать эти свойства, чтобы получить свойства функции комплексного переменного.

Скажем, по свойству непрерывности функция двух переменных $F(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $F(M_0) = A$, где $A$ – некое число, и для любой последовательности точек $\{M_n\} \to M_0$ соответствующая последовательность значений $\{F(M_n)\} \to A$. На основании этого определения несложно определить непрерывность функции комплексного переменного.

**Определение**. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* $z_0$, если $f(z_0)$ определено, и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall z: \ 0 < |z - z_0| < \delta$ выполнено $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Несложно доказать утверждение: если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0; y_0)$, то и функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Теперь решим вопрос о производной функции. Представляется разумным взять и перенести на функции двух переменных определение производной, введённой для функции одного переменного: производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

**Определение.** Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z$. *Производной функции комплексного переменного*

$f(z)$ называется предел отношения $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ и обозначается $f'(z)$ или $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Соответственно, если у функции есть производная, то она называется *дифференцируемой*.

**Определение.** Пусть функция $f(z)$ однозначна в точке $z_0$ и дифференцируема в этой точке. Тогда она называется *аналитической в точке* $z_0$.

**Определение.** Если функция $f(z)$ является аналитической во всех точках области $D$, то она называется *аналитической в области* $D$.

**Теорема.** Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, то в этой точке существуют частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным $x$ и $y$, и выполнены соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0). \end{cases}$$

Эти условия называются *условиями Коши-Римана*.

*Доказательство:* Устремим в определении предела $\Delta z$ к нулю. Можно вспомнить, что $\Delta z$ – комплексное число, то есть, на самом деле, пара вещественных чисел. Значит, мы можем двигаться к нулю, например, по числам чисто мнимым (то есть с нулевой вещественной частью) или по числам чисто вещественным (то есть с нулевой мнимой частью).

Движемся сначала по чисто мнимым числам: $\Delta z=i\Delta y$. Тогда предел примет вид:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\big(u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)\big)-\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)}{i\Delta y}.$$

Разобьём полученное выражение на две части: отдельно мнимые величины числителя, отдельно – вещественные.

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left(u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)\right)-\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left(u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right)+i\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)}{i\Delta y}=$$

$$=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)}{i\Delta y}.$$

Каждый из пределов несложно найти:

$$\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Окончательно получаем: $f'(z)=-i\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Теперь будем двигаться по чисто вещественным числам:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)\right)-\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)}{\Delta x}.$$

Разобьём полученное выражение на две части: отдельно мнимые величины числителя, отдельно – вещественные.

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)\right)-\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\right)+i\left(v(x+\Delta x,y)-v(x,y)\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{i\left(v(x+\Delta x,y)-v(x,y)\right)}{\Delta x}=i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Окончательно получаем: $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Мы получили для одной и той же производной два выражения: $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $f'(z)=-i\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$. Так как функция дифференцируема, то и выражения должны быть одинаковы. $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$.

Приравнивая отдельно вещественные и мнимые части, получаем: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}$, откуда $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, то есть – утверждение теоремы.

Итак, если функция дифференцируема, то для неё верны условия Коши-Римана. Справедливо и обратное утверждение:

**Теорема.** Если в точке $M_0(x_0;y_0)$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, а их производные связаны соотношениями Коши-Римана, то функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ является дифференцируемой функцией комплексной переменной $z$ в точке $z_0=x_0+iy_0$.

Доказательство теоремы можно найти в [6].

**1. Вопросы для самоконтроля**:

1. Что такое область? Чем отличается замкнутая область от области? Какие области называются ограниченными?
2. Что такое мнимая и действительная части функции комплексного переменного? Как они обозначаются?
3. Как можно выполнять арифметические действия (сложение, вычитание, умножение) с комплексными числами?
4. Сформулируйте понятие однолистности.
5. Приведите пример неоднолистной функции.
6. Что называется точкой ветвления функции?
7. Что такое производная функции комплексного аргумента?
8. Напишите формулу Коши-Римана. Сформулируйте условия теоремы.
9. Если функция подчиняется условиям Коши-Римана, то будет ли у она дифференцируема?

**2. Укажите множества на комплексной плоскости, постройте их:**

**Пример**. Укажите множество, задаваемое неравенством $\operatorname{Im}\frac{z+3}{z-i}<1$.

*Решение.* Выполним деление:

$$\frac{z+3}{z-i}=\frac{x+iy+3}{x+iy-i}=\frac{(x+3)+iy}{x+i(y-1)}=\frac{(x+3)+iy}{x+i(y-1)}\cdot\frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}=\frac{((x+3)+iy)\cdot(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

Откроем скобки в числителе:

$$\frac{((x+3)+iy)\cdot(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x(x+3)+y(y-1)+i(xy-(y-1)(x+3))}{x^2+(y-1)^2}.$$

Вычисляем мнимую часть неравенства:

$$\operatorname{Im}\frac{z+3}{z-i}=\operatorname{Im}\frac{x(x+3)+y(y-1)+i\big(xy-(y-1)(x+3)\big)}{x^2+(y-1)^2}=\frac{\big(xy-(y-1)(x+3)\big)}{x^2+(y-1)^2}.$$

В результате получается вещественное неравенство: $\dfrac{\big(xy-(y-1)(x+3)\big)}{x^2+(y-1)^2}<1.$

В этом соотношении удобно открыть скобки:

$$\frac{xy-(y-1)(x+3)}{x^2+(y-1)^2}=\frac{xy-xy+x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}<1.$$

Умножив обе части на знаменатель, получим соотношение: $x-3y+3<x^2+(y-1)^2$. Открывая скобки в нём, получаем: $x-3y+3<x^2+y^2-2y+1$, и далее: $2<x^2-x+y^2+y$. В данном соотношении несложно выделить полный квадрат, и в результате получим:

$$\frac{3}{2}<\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Это – внешность круга с центром в точке $M_0\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ радиуса $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

**2. Постройте линии, заданные соотношениями**

| | | |
|---|---|---|
| 37. $\lvert z-i\rvert=1$; | 38. $\operatorname{Re}z>3$; | 39. $\operatorname{Im}z<-5$; |
| 40. $0<\operatorname{Re}\left(i^3z\right)<\pi$; | 41. $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$; | 42. $\operatorname{Re}\dfrac{z-i}{z+i}=3$; |
| 43. $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=3$; | 44. $\dfrac{\pi}{3}<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{2}$; | 45. $\lvert z-i\rvert>\lvert z-1\rvert$. |

**3. Задана часть функции (вещественная или мнимая). Найдите другую её часть, пользуясь условиями Коши-Римана.**

**Пример.** Рассмотрим функцию $u(x,y)=x^2-y^2$, являющуюся вещественной частью некоторой функции комплексного переменного: $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$. Известно, что функция удовлетворяет условиям теоремы Коши-Римана. Найти саму функцию $f(z)$.

*Решение.* Воспользуемся условиями Коши-Римана: $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$. Найдём $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, учитывая, что производная – частная: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right)=2x$. Исходя из условий Коши-Римана, получаем: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x$. Интегрируем по $y$, получаем: $v=\int 2x\partial y=2xy+q(x)$.

Наша задача теперь – найти функцию $q(x)$. Для этого воспользуемся вторым соотношением условий Коши-Римана: $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$. Подставляем, получим в результате: $\frac{\partial}{\partial x}v=2y+q'(x)$. С другой стороны, $-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y^2\right)=2y$. Так как эти выражения должны быть равны, то получаем, сравнивая: $\frac{\partial}{\partial x}v=2y+q'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, или $2y+q'(x)=2y$, откуда $q'(x)=0$. Следовательно, $q(x)=0$.

Таким образом, мы получаем функцию $v=2xy$, а сама функция $f(z)=x^2-y^2+2ixy$.

Приведём полученный результат к обычной функции комплексного переменного:

$$f(z)=\left(x^2+ixy\right)-\left(y^2-ixy\right)=x\left(x+iy\right)-\left(-(iy)^2-ixy\right)=x\left(x+iy\right)+\left((iy)^2+ixy\right)=$$
$$=x\left(x+iy\right)+iy\left(iy+x\right)$$

Заметим, что $x+iy=z$, получим:

$$f(z)=x\left(x+iy\right)+iy\left(iy+x\right)=xz+iyz=z\left(x+iy\right)=z^2.$$

**4. Дана вещественная $u(x,y)$ или мнимая $v(x,y)$ часть функции $f(z)$. Найти, пользуясь соотношениями Коши-Римана, функцию $f(z)$:**

| | | |
|---|---|---|
| 46. $v=e^x\sin(y)$; | 47. $u=x$; | 48. $v=-x$; |
| 49. $u=x^3-3xy^2$; | 50. $u=\cos x\cdot \operatorname{ch} y$; | 51. $v=\frac{x}{x^2+y^2}$. |

Обратной операцией к дифференцированию функции является интегрирование. Двойной интеграл от функции комплексной переменной – просто обычный двойной интеграл; то же самое можно сказать и про криволинейный интеграл первого рода. Зато есть определённые отличия в криволинейном интеграле по координатам или криволинейном интеграле второго рода. Так как этот интеграл играет большую роль в теории функций комплексного переменного, то рассмотрим его подробнее.

Сначала определим криволинейный интеграл второго рода.

Пусть задана кривая $C$ на комплексной плоскости (рис. 10). Разобьём кривую точками $z_1$, $z_2$, …, $z_N$, причём пусть первая и последняя точки разбиения совпадают с началом и концом кривой $C$. В результате получим дуги $z_j z_{j+1}$. На каждой из дуг выберем точку $z_j^*$ произвольным образом.

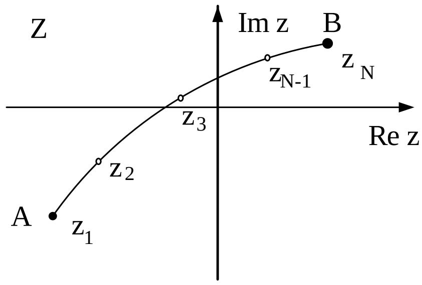



Рис. 10. Кривая $C$, на которой задана функция $f(z)$

Пусть нам задана на кривой $C$ некоторая функция $f(z)$. Проинтегрируем $f(z)$ по кривой. Составим интегральную сумму $I=\sum\limits_{j=1}^{N-1} f\left(z_j^*\right)\left(z_{j+1}-z_j\right)$. В полученной интегральной сумме устремляем к бесконечности число точек разбиения $N$, а наибольшее из чисел $\left|z_{j+1}-z_j\right|$ к нулю. Если такие пределы при произвольном выборе точек $z_j^*$ существуют и совпадают, то это и есть криволинейный интеграл от функции $f(z)$ по кривой $C$.

**Определение.** *Криволинейным интегралом от функции* $f(z)$, заданной на кривой $C$ комплексной плоскости, называется предел интегральных сумм $I=\sum\limits_{j=1}^{N-1} f\left(z_j^*\right)\left(z_{j+1}-z_j\right)$ при стремлении числа точек разбиения $N$ к бесконечности. Одновременно с этим наибольшее из расстояний $\left|z_{j+1}-z_j\right|$ $\max\left|z_{j+1}-z_j\right|$ стремится к нулю, а разбиение точками $z_j$, если оно удовлетворяет этому условию, произвольное, как и выбор промежуточных точек $z_j^*$: $\lim\limits_{\substack{N\to\infty \\ \max\left|z_{j+1}-z_j\right|\to 0}} \left(\sum\limits_{j=1}^{N-1} f\left(z_j^*\right)\left(z_{j+1}-z_j\right)\right)=\int\limits_C f(z)dz.$

**Свойства:**

1. Знак интеграла меняется при смене направления интегрирования:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz=-\int\limits_{BA} f(z)dz$$

2. Сумма интегралов по кривым $C_1$ и $C_2$ равна интегралу по объединению кривых:

$$\int\limits_{C_1} f(z)dz+\int\limits_{C_2} f(z)dz=\int\limits_{C_1+C_2} f(z)dz$$

3. Постоянный множитель может быть вынесен за знак интеграла:

$$\int\limits_{C_1} Af(z)dz=A\int\limits_{C_1} f(z)dz,\ A=const$$

4. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int_C \{f(z)+g(z)\}dz = \int_C g(z)dz + \int_C f(z)dz$$

5. Модуль интеграла по кривой меньше, чем криволинейный интеграл от модуля функции по той же кривой:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds$$

6. Формула замены переменной:

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(\varphi(\varsigma))\varphi'(\varsigma)d\varsigma,$$

где сделана замена переменной: $z=\varphi(\varsigma)$.

**Пример.** Пусть кривая $C$ представляет собой окружность радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке $z_0$ (рис. 11), эту кривую можно задать формулой: $|z-z_0|=\varepsilon$. Пусть нам нужно вычислить интеграл по этой кривой: $I=\int_C \frac{dz}{z-z_0}$.

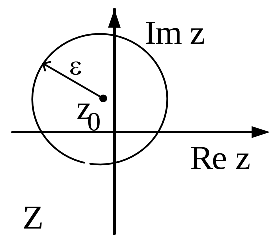



Рис. 11. Кривая $C$ окружность радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке $z_0$

Для решения перейдём к новой переменной $t$, которая будет вещественной. Пусть $t\in[0;2\pi]$. Тогда старую переменную $z$ можно записать в виде $z=z_0+\varepsilon\exp(it)$.

Вычисляем дифференциал:

$$dz = d\left(z_0+\varepsilon\exp(it)\right) = dz_0 + d\left(\varepsilon\exp(it)\right) = 0+\varepsilon d\left(\exp(it)\right) = \varepsilon\left(\exp(it)\right)' dt =$$
$$= i\varepsilon\exp(it)dt.$$

Соответственно, $z-z_0=\varepsilon\exp(it)$, в результате интеграл принимает вид:

$$I=\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon\exp(it)dt}{\varepsilon\exp(it)} = \int_0^{2\pi} idt = i\cdot t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Теперь мы можем доказать одну из центральных теорем теории функций комплексного переменного – теорему Коши.

**Теорема (Коши).** Пусть в односвязной области $D$ задана однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру $C$, целиком лежащему в области $D$, равен нулю.

*Доказательство:* Для замкнутого контура из курса анализа функций вещественного переменного известна формула Грина – формула для интегрирования по замкнутому контуру функций вещественной переменной: $\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left\{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}dxdy$, где $P(x,y)$ – дифференцируемые функции вещественного переменного, замкнутый контур $C$ является границей области $D$, интеграл в формуле слева – двойной интеграл по всей области, охваченной контуром $C$.

В случае функции комплексного переменного интеграл запишем в виде: $\oint\limits_C f(z)dz$. Пусть под интегралом стоит аналитическая в области $D$ функция $f(z)$, то есть такая функция, что $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $u(x,y)-$ вещественная часть, $v(x,y)-$ мнимая, при этом функции удовлетворяют условиям Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Пусть также контур $C$ замкнут, достаточно гладок, и целиком лежит в области аналитичности функции $D$.

Запишем функцию $f(z)$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ под интеграл и попробуем применить к ней формулу Грина. Дополнительно отметим, что $dz=d(x+iy)=dx+idy$.

Итак:

$$\oint\limits_C f(z)dz=\oint\limits_C\{u(x,y)+iv(x,y)\}\{dx+idy\}.$$

Откроем скобки:

$$\oint\limits_C f(z)dz=\oint\limits_C u(x,y)dx+iv(x,y)dx+iu(x,y)dy+i^2v(x,y)dy,$$

или, после преобразований:

$$\oint\limits_C f(z)dz=\oint\limits_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\oint\limits_C v(x,y)dx+u(x,y)dy.$$

Рассмотрим отдельно каждое из слагаемых, применяя формулу Грина:

$$\oint\limits_C u(x,y)dx-v(x,y)dy=\iint\limits_{D_C}\left\{-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}dxdy.$$

Учитывая соотношение Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, получаем, что подынтегральное выражение равно нулю. Следовательно, и весь этот интеграл равен нулю.

Теперь второе слагаемое: $\oint\limits_C v(x,y)dx+u(x,y)dy=\iint\limits_{D_C}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right\}dxdy$.

Учитывая соотношение $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, получим, что под интегралом также нуль.

Таким образом, мы доказали теорему Коши.

Но что, если функция $f(z)$ не будет аналитической в некотором конечном количестве точек внутри контура $C$? Можно ли тогда пользоваться теоремой Коши? Конечно, в прежнем виде – нет. Но можно выделить эти точки, «вырезав» их небольшими областями (рис. 12). Тогда теорема Коши будет верна.

**Теорема.** Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в многосвязной области $D$, ограниченной извне контуром $C_0$, а изнутри – контурами $C_1$, $C_2$, …, $C_n$, и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда $\oint\limits_C f(z)dz = 0$, где $C$ – полная граница области $D$, состоящая из контуров $C_0$, $C_1$, $C_2$, …, $C_n$, причём обход границы $C$ происходит в положительном направлении.

*Доказательство:* проведём гладкие кривые $\gamma_1$, $\gamma_2$, …, $\gamma_n$, которые соединяли бы внешний контур $C_0$ с контурами $C_1$, $C_2$, …, $C_n$ так, как это показано на рис. 12. Тогда вся совокупность контуров $\Gamma = C_0 \cup C_1 \cup C_2 ... \cup C_n \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 ... \cup \gamma_n$ будет ограничивать односвязную область. При этом несложно видеть, что кривые $\gamma_1$, $\gamma_2$, …, $\gamma_n$ будут проходиться дважды в противоположном направлении (чтобы в этом убедиться, достаточно обвести контур с разрезами карандашом).

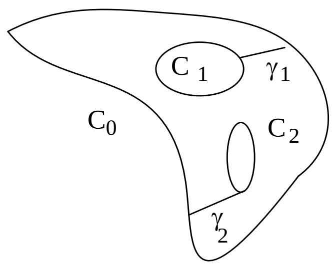


Рис. 12. Область $D$ неодносвязна и ограничена как снаружи контуром $C_0$, так и изнутри контурами $C_2$, …, $C_n$

Так же несложно видеть, что при таком обходе внутренние контуры будут проходиться в противоположном направлении.

Для односвязного контура справедлива теорема Коши: $\oint\limits_\Gamma f(z)dz = 0$. Контур $\Gamma = C_0 \cup C_1 \cup C_2 ... \cup C_n \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 ... \cup \gamma_n$, следовательно, по свойству интеграла,

$$\oint\limits_\Gamma f(z)dz = \oint\limits_{C_0 \cup C_1 \cup C_2 ... \cup C_n \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 ... \cup \gamma_n} f(z)dz = \oint\limits_{C_0^+} f(z)dz + \oint\limits_{C_1^-} f(z)dz + ... + \oint\limits_{C_n^-} f(z)dz +$$

$$+\oint\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_1^-} f(z)dz + ... + \oint\limits_{\gamma_n^+} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_n^-} f(z)dz.$$

Здесь верхние индексы у кривой задают направление обхода контура. Плюс соответствует обходу против часовой стрелки, минус – по часовой.

Учтём, что разрезы проходятся дважды – в противоположных направлениях. По свойству криволинейного интеграла, $\oint\limits_{\gamma_j^+} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_j^-} f(z)dz = 0$. Следовательно,

$$0 = \oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \oint\limits_{C_0^+} f(z)dz + \oint\limits_{C_1^-} f(z)dz + \ldots + \oint\limits_{C_n^-} f(z)dz = \oint\limits_{C} f(z)dz,$$

что и требовалось доказать.

### *Интеграл функции комплексного переменного*

Первообразная $F(z)$ функции $f(z)$ – такая функция, что производная от неё равна исходной функции: $F'(z) = f(z)$.

Однако в курсе анализа функций вещественной переменной первообразную связывают с интегралом с переменным верхним пределом. В случае функций комплексной переменной интеграл – контурный, и, вообще говоря, может зависеть от выбора кривой, по которой ведётся интегрирование. Тем не менее, в силу теоремы Коши интеграл не зависит от выбора контура (докажите самостоятельно, что это действительно так).

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна в некоторой односвязной области $D$, а интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру $C$, целиком лежащему в этой области, равен нулю. Тогда функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$, $z_0, z \in D$ является аналитической функцией в $D$ и $F'(z) = f(z)$.

*Доказательство.* Для доказательства составим разностное соотношение:

$$F'(z) = \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left\{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)dz - \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz\right\} = \frac{1}{\Delta z}\left\{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz\right\}.$$

Заметим, что такое соотношение возможно только в силу независимости интеграла от выбора контура.

Выберем в качестве контура интегрирования прямую, которая соединяла бы точки $z$ и $z_0$. В этом случае $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} dz = \Delta z$.

Оценим такое выражение $\left|\dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right|$.

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz\right\}\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\left(f(\varsigma)-f(z)\right)d\varsigma\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\varsigma\in[z;z+\Delta z]}\left|f(\varsigma)-f(z)\right|\cdot|\Delta z|=\max_{\varsigma\in[z;z+\Delta z]}\left|f(\varsigma)-f(z)\right|.$$

Функция непрерывна; значит, выбирая остаточно малый $\Delta z$ можно сделать выражение внутри модуля $\left|f(\varsigma)-f(z)\right|$ сколь угодно малым: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при $|\Delta z|<\delta$ $\max\limits_{\varsigma\in[z;z+\Delta z]}\left|f(\varsigma)-f(z)\right|<\varepsilon$. А следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при $|\Delta z|<\delta$ $\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$.

Это означает, что $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$.

**1. Вопросы для самоконтроля:**

1. Что такое $\arg z$? Чем отличается $\arg z$ от $Arg\, z$? Приведите пример вычисления комплексного аргумента.
2. Что такое мнимая и действительная части функции комплексного переменного? Как они обозначаются?
3. Как можно выполнять арифметические действия (сложение, вычитание, умножение) с комплексными числами?
4. Есть ли отличия первообразной функции одного вещественного аргумента от первообразной функции комплексного переменного?
5. Определение интеграла функции комплексной переменной.

**2. Вычислите вещественную и мнимую часть комплексной функции:**

**Пример**. $f(1+i)=e^{1+i}$.

*Решение.*

$$f(1+i)=e^{1+i}=e^{1}\cdot e^{i}=e\cdot\left(e^{1\cdot i}\right)=e\cdot(\cos 1+i\sin 1)=e\cdot\cos 1+ie\cdot\sin 1=$$
$$=(e\cdot\cos 1;e\cdot\sin 1).$$

**Пример**. Найти $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

*Решение.* $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)$ – функция, где используется полный аргумент комплексного числа, $Arg\, z$. Для вычисления значения удобно число под знаком логарифма представить в показательной форме: $\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$, точка располагается в первой четверти, следовательно, её малый аргумент несложно найти по формуле: $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, большой аргумент будет $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, где $k$ - произвольное целое число. Таким образом, получаем: $1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}$.

Соответственно, логарифм числа несложно вычислить так: $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right) = Ln\left(2\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}\right) = \ln 2 + \ln e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)} = \ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

| | | |
|---|---|---|
| 52. $\cos(2+i)$; | 53. $\sin(2i)$; | 54. $tg(1-i)$; |
| 55. $Ln 4$; | 56. $Ln i, \ln i$; | 57. $Ln\dfrac{1\pm i}{2}$; |
| 58. $\operatorname{Arcsin}(1+i)$; | 59. $\operatorname{Arccos}(2)$; | 60. $\operatorname{Arctg}(1+2i)$. |

**3. Вычислите вещественную и мнимую часть функции, заданной формулой:**

**Пример.** Найти явное выражение для функции $f(z) = \operatorname{Arcsin} z$.

*Решение.* Выясним, какова должна быть функция арксинус комплексного аргумента. Так как арксинус – функция, обратная синусу, то для нахождения арксинуса необходимо обратить синус: $\sin z = w$, следовательно, $z = \operatorname{Arcsin} w$.

Рассмотрим $\sin z = w$. Так как $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, то введём обозначение $p = e^{iz}$, и получим соотношение: $\dfrac{p - 1/p}{2i} = w$, откуда $\dfrac{p^2 - 1}{2ip} = w$, или квадратное уравнение с комплексными коэффициентами: $p^2 - 1 = 2ipw$, или $p^2 - 2ipw - 1 = 0$. Его решение – две функции (то есть арксинус комплексной переменной – ветвящаяся функция): $p = \dfrac{2iw \pm \sqrt{4w^2 - 4}}{2} = iw \pm \sqrt{w^2 - 1}$.

Если учесть формулу $p = e^{iz}$, получим: $e^{iz} = iw \pm \sqrt{1 - w^2}$. Выберем знак «+» и избавимся от экспоненты в обоих частях неравенства. Получим: $z = -iLn\left(w + \sqrt{1 - w^2}\right)$.

**4.** а) найти все значения:

| | | |
|---|---|---|
| 61. $i^i$; | 62. $2^i$; | 63. $1^{\sqrt{2}}$; |
| 64. $(-2)^{\sqrt{2}}$; | 65. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; | 66. $1^i$. |

б) найти все корни:

| | | |
|---|---|---|
| 67. $\sin z + \cos z = 2$; | 68. $\sin z = 3$; | 69. $\sin z - \cos z = i$. |

в) верно ли, что:

| | | |
|---|---|---|
| 70. $\operatorname{Arcsin} z = -iLn\left(i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right)$ | 71. $Arctg\, z = \dfrac{i}{2} Ln\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$ | 72. $\operatorname{Arcch} z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$ |

**5. Найдите первообразную:**

**Пример**. Найти первообразную $f(z) = z$.

*Решение.* Первообразная функции $f(z) = z$ может быть вычислена непосредственным интегрированием по произвольному контуру: $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} z dz = \left.\dfrac{z^2}{2}\right|_{z_0}^{z} = \dfrac{z^2}{2} + C$, где $C$ – произвольное комплексное число.

| | | |
|---|---|---|
| 73. $\sin z$; | 74. $\ln z$; | 75. $\exp(z)$. |

## *Формула Коши*

Одним из важнейших свойств криволинейных интегралов по комплексной переменной является формула Коши. Её построение основано на теореме Коши.

**Определение.** Область называется *односвязной*, если любые две её точки можно соединить кривой, целиком принадлежащей этой области.

Чтобы получить формулу Коши, рассмотрим функцию $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$. Потребуем, чтобы функция $f(z)$ была бы аналитической всюду в некоторой односвязной области $D$. Тогда и функция $\varphi(z)$ будет аналитической в области $D$, за исключением точки $z = z_0$ – при условии, что эта точка находится в области $D$. Потребуем также, чтобы точка $z = z_0$ находилась бы в области $D$ так, чтобы можно было охватить точку $z = z_0$ контуром $C$, целиком принадлежащим области $D$ так, чтобы точка оказалась бы внутри контура (рис. 13).

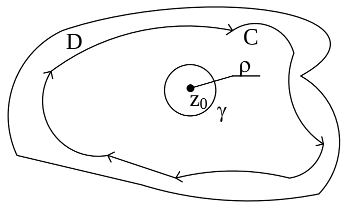


Рис.13. Область, охватываемая контуром

Теперь поступим следующим образом. Проведём контур $\gamma$ так, чтобы $\gamma$ был кругом радиуса $\rho$ с центром в точке $z_0$. При этом необходимо, чтобы контур $\gamma$ не имел общих точек с контуром $C$, и вся круговая область, ограниченная $\gamma$, находилась бы внутри области, охваченной контуром $C$.

Таким образом, мы получим некоторую область, заключённую между контуром $C$ и контуром $\gamma$. В этой области вспомогательная функция $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ будет аналитической.

По теореме Коши, интеграл по объединению контуров $C'=C^{+}+\gamma^{-}$ (знаки указывают направление обхода контура) будет равен нулю: $\oint\limits_{C'}\varphi(z)dz=\oint\limits_{C^{+}}\varphi(z)dz+\oint\limits_{\gamma^{-}}\varphi(z)dz=0$. Перенесём интеграл по контуру $\gamma$ вправо: $\oint\limits_{C^{+}}\varphi(z)dz=\oint\limits_{\gamma^{+}}\varphi(z)dz$. При этом знак должен поменяться, но мы сменим направление обхода контура.

Теперь отметим, что $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$, следовательно, $\oint\limits_{C^{+}}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint\limits_{\gamma^{+}}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$.

Рассмотрим подробно второй интеграл $\oint\limits_{\gamma^{+}}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$. Выполним замену переменной: $z=z_0+\rho e^{ix}$, при этом переменная $x$, чтобы обойти контур, должна будет пробежать промежуток $x\in[0;2\pi]$. Тогда интеграл примет вид: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)}{z_0+\rho e^{ix}-z_0}d\left(z_0+\rho e^{ix}\right)$. После несложных преобразований получим:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)}{\rho e^{ix}}i\rho e^{ix}dx.$$

Сокращая числитель и знаменатель, получаем $i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)dx$.

Для дальнейшего вычисления добавим и вычтем такой интеграл:

$$i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)dx=i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)dx-i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0\right)dx+i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0\right)dx=$$

$$=i\int\limits_0^{2\pi}\left\{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right\}dx++i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0\right)dx.$$

Рассмотрим отдельно $f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)$. Так как функция $f\left(z\right)$ аналитическая, то она около точки $z_0$ непрерывна. Следовательно, при стремлении к нулю $\rho\to 0$ получится, что разность $f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)$ так же стремится к нулю: $\left|f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right|\to 0$: для любого положительного числа $\varepsilon>0$ можно указать такое значение $\delta>0$, что $\left|f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right|<\varepsilon$ для $\left|\rho e^{ix}\right|<\delta$. Следовательно, $\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\left\{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right\}dx=0$.

В формуле $i\int\limits_0^{2\pi}\left\{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right\}dx+i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0\right)dx$ последнее слагаемое не зависит от $x$; следовательно, этот интеграл несложно вычислить: $i\int\limits_0^{2\pi}f\left(z_0\right)dx=2\pi i f\left(z_0\right)$. Получаем формулу:

$$\oint\limits_{C^+}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz=i\int\limits_0^{2\pi}\left\{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right\}dx+2\pi i f\left(z_0\right).$$

Перейдём в этом выражении к пределу при $\rho\to 0$, в результате получим: $\lim\limits_{\rho\to 0}\oint\limits_{C^+}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz=\lim\limits_{\rho\to 0}\left[i\int\limits_0^{2\pi}\left\{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right\}dx\right]+2\pi i f\left(z_0\right)$. Выражение слева так же не зависит от $\rho$, следовательно, предел там не нужен: $\oint\limits_{C^+}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz=\lim\limits_{\rho\to 0}\left[i\int\limits_0^{2\pi}\left\{f\left(z_0+\rho e^{ix}\right)-f\left(z_0\right)\right\}dx\right]+2\pi i f\left(z_0\right)$. Предел выражения справа известен, и равен нулю. Окончательно получаем: $\oint\limits_{C^+}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz=2\pi i f\left(z_0\right)$. Это и есть *формула Коши.*

### ***Следствия формулы Коши***

**1. Разные положения точки** $z_0$**.** В том случае, если точка $z_0$ принадлежит внутренней для контура области, то формула уже получена: $\oint\limits_{C^+}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz=2\pi i f\left(z_0\right)$.

Если точка лежит в области, для контура внешней, то тогда подынтегральная функция будет аналитической всюду внутри контура, и верна теорема Коши для аналитической функции – интеграл будет равен нулю.

Если точка лежит на контуре, то в этом случае $\oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \pi i f(z_0)$. Подробное доказательство можно найти в [6].

Окончательный результат этого пункта имеет вид:

$$\oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0),\ z_0 \textit{ внутри контура } C \\ \pi i f(z_0),\ z_0 \textit{ на самом контуре } C \\ 0,\ z_0 \textit{ вне контура } C \end{cases}$$

**2. Формула среднего значения.** Пусть функция $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области $D$, а точка $z_0$ – внутренняя точка этой области. Возьмём $z_0$ за центр окружности и построим окружность радиуса $R$ так, чтобы построенный круг целиком лежал бы в области $D$. По формуле Коши: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$, где $C_R$ – построенная нами окружность (то есть окружность радиуса $R$ с центром в точке $z_0$).

В интеграле $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ выполним замену переменной:

$$z = z_0 + \mathrm{R}\, e^{ix},$$

тогда интеграл примет вид:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \mathrm{Re}^{ix}\right)}{z_0 + \mathrm{Re}^{ix} - z_0} d\left(z_0 + \mathrm{Re}^{ix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \mathrm{Re}^{ix}\right)}{\mathrm{Re}^{ix}} \mathrm{Re}^{ix}\, i dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + \mathrm{Re}^{ix}\right) dx.$$

То же самое, параметризуя окружность, можно записать по-другому: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f\left(z_0 + \mathrm{Re}^{ix}\right) ds$. Здесь интеграл берётся по окружности, но это – интеграл не второго, а первого рода.

**3. Принцип максимума модуля аналитической функции**. Теорема о максимуме модуля аналитической функции формулируется так:

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $D$ и непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда или $|f(z)| \equiv const$ всюду в $D$, или максимальные значения $f(z)$ достигаются на границе области $\partial D$.

*Доказательство.* Модуль функции $f(z)$ есть функция $|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$. Так как функция $f(z)$ аналитическая, то её модуль – функция непрерывная.

Предположим, что теорема неверна, и наибольшее значение функции-модуля достигается в какой-то внутренней точке области $D$ – в точке $M_0$. Следовательно, существует такая точка $z_0 \in D$, что $K=|f(z_0)| \geq |f(z)|$, $z \in D$.

Пусть точка $z_0$ – внутренняя точка области $D$. Тогда её можно окружить контуром радиуса $R$, и по формуле среднего значения (по другому её называют – теорема о среднем) мы получим: $2\pi K=\left|\int\limits_0^{2\pi} f(z)dx\right| \leq \int\limits_0^{2\pi}|f(z)|dx \leq 2\pi K$. Отсюда $\int\limits_0^{2\pi}|f(z)|dx=2\pi K$.

Так как функция $|f(z)|$ не может быть больше $K$, то она меньше или равна $K$. Но меньше она быть не может, так как тогда интеграл будет меньше, чем $2\pi K$. Следовательно, всюду на этой окружности $|f(z)|=K$. Так как мы можем взять круг и меньшего радиуса, то $|f(z)|=K$ и во всех точках внутри круга.

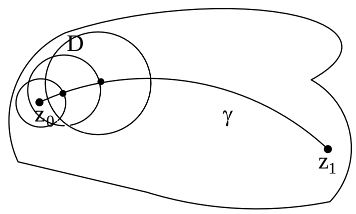



Рис. 14. Набор окружностей и их пересечения с линией, соединяющих точки $z_1$ и $z_0$

Возьмём некоторую кривую, целиком принадлежащую области $D$, которая соединяла бы произвольную точку области $D$, точку $z_1$, с точкой $z_0$ (рис. 14). Окружность пересечётся с кривой в точке $z_2$. Следовательно, в точке $z_2$ $|f(z_2)|=K$. Строим круг с центром в $z_2$, находим его пересечение с линией и так далее, пока не попадём в точку $z_1$. В силу произвольности выбора точки $z_1$ получаем, что $|f(z)|=K$ для всех внутренних точек области.

Несложно доказать в дополнение к принципу максимума принцип минимума. Для этого можно рассмотреть функцию $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, для которой выполнен принцип максимума.

**4. Формула Коши для старших производных.** Рассмотрим интеграл Коши: $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$, где точка $z$ лежит внутри контура $C$. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая. Это означает, что у неё существуют производные всех порядков.

Продифференцируем обе части по $z$. Получим: $\frac{d}{dz}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\left(\oint_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma\right)$. В [6] можно найти подробное обоснование свойства интеграла Коши: можно поменять местами интегрирование и дифференцирование:

$$\frac{d}{dz}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d}{dz}\left(\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\right)d\varsigma .$$

Отсюда получаем: $\frac{d}{dz}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}d\varsigma$. Повторяя дифференцирование произвольное количество раз, получим в результате: $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}}d\varsigma$. Это и есть формула производной любого порядка.

**5. Теорема Морера.** Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в односвязной области $D$ и интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в $D$, равен нулю. Тогда $f(z)$ – аналитическая функция в области $D$.

*Доказательство:* Ранее было доказано, что $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$, где $z_0$, $z$ – произвольные точки области $D$, интеграл берётся по произвольной кривой, соединяющей эти точки, и $F'(z)=f(z)$.

Производная аналитической функции есть аналитическая функция, следовательно, функция $f(z)$ – аналитическая.

**6. Теорема Лиувилля.** Пусть на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ – аналитическая, а её модуль равномерно ограничен. Тогда эта функция $f(z)$ тождественно равна постоянной.

*Доказательство:* Согласно формуле Коши для первой производной $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}d\varsigma$. В качестве контура выберем окружность радиуса $R$ с центром в точке $z$. Тогда $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}d\varsigma$.

По условию теоремы, функция $f(z)$ равномерно ограничена, то есть существует такая постоянная $K$, что для всякого $z$ из области $D$ выполнено соотношение: $|f(z)|\le K$.

Следовательно,

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\left|\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}\right|ds = \frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\frac{\left|f(\varsigma)\right|}{R^2}ds \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\frac{K}{R^2}ds = \frac{1}{2\pi}\frac{K}{R}.$$

Радиус $R$ можно выбрать сколь угодно большим, а левая часть – производная $f'(z)$ не зависит от радиуса. Это означает, что $\left|f'(z)\right| = 0$.

В силу произвольности выбора точки $z$ заключаем, что модуль производной равен нулю во всей области. Такое возможно, лишь если функция постоянна во всей области.

**1. Вопросы для самоконтроля**:

1. Что такое криволинейный интеграл второго рода (криволинейный интеграл по координатам)?
2. Формула Грина.
3. Как ввести параметризацию в криволинейном интеграле второго рода?
4. Формула Коши.
5. Для каких функций применима формула Коши?
6. Формула Коши для старших производных.
7. Сформулируйте теорему Морера.
8. Сформулируйте теорему Лиувилля.

**2. Докажите равенство:**

**Пример**. Вычислите интеграл непосредственным интегрированием: $\int\limits_C y^2dx$, где контур $C$ – участок прямой линии, начинающейся в начале координат и заканчивающийся в точке $1+i$.

*Решение.* Параметризуем прямую. Она соединяет точки с координатами $(0;0)$ с $(1;1)$. Следовательно, $x=t$, $y=t$, где параметр $t$ меняется от 0 до 1. Подставляем в интеграл, получаем: $\int\limits_C y^2dx = \int\limits_0^1 t^2dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$

| |
|---|
| 76. $\int\limits_C xdz = iS,$ где $S$ – площадь, $C$ – любой замкнутый контур; |
| 77. $\oint\limits_C \bar{z}dz = 2iS,$ где $S$ – площадь, $C$ – любой замкнутый контур; |
| 78. $\oint\limits_C ydz = -S,$ где $S$ – площадь, $C$ – любой замкнутый контур; $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} z^{\alpha}\, dz,$ $C$ – $z=2+i$ $\int\limits_C \lvert z\rvert dz$; |

**3. Вычислите:**

| |
|---|
| 79. $\int\limits_C xdz$, где – радиус-вектор точки $z = 2+i$; |
| 80. $\int\limits_C \lvert z\rvert dz$, где $C$ – полуокружность $\lvert z\rvert = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$; |
| 81. $\int\limits_C \lvert z\rvert \bar{z} dz$, где $C$ – замкнутый контур, состоящий из полуокружности $\lvert z\rvert = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$, отрезка $-1 \le x \le 1$, $y = 0$; |
| 82. $\oint\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $C$ – верхняя полуокружность $\lvert z\rvert = 1$, $\sqrt{1} = 1$; |
| 83. $\oint\limits_C Ln\, z\, dz$, где $C$ – единичная окружность $\lvert z\rvert = 1$, $Ln1 = 0$; |
| 84. $\int\limits_C z^{\alpha} dz$, где $\alpha$ – произвольное комплексное число, $1^{\alpha} = 1$. |

**4. Вычислите, используя теорему Коши:**

**Пример.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+1}$, где точка $z = i$ лежит внутри контура $C$, а точка $z = -i$

*Решение.* Разобьём подынтегральное выражение на множители: $\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+1} = \oint\limits_C \frac{dz}{(z+i)(z-i)}$. Так как контур охватывает только точку $z = i$, то всё выражение можно записать так: $\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+1} = \oint\limits_C \frac{\frac{1}{(z+i)}}{(z-i)} dz$. Считаем, что $f(z) = \frac{1}{z+i}$, тогда по формулам получаем: $\oint\limits_C \frac{\frac{1}{(z+i)}}{(z-i)} dz = \left.\frac{2\pi i}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{2\pi i}{i+i} = \pi$.

**5. Вычислите:**

| | | |
|---|---|---|
| 85. $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=1} \frac{dz}{z(z^2-1)}$; | 86. $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=1} \frac{e^z dz}{z^2+1}$; | 87. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$. |

## 2. Ряды аналитических функций

### *Основные понятия*

**Определение.** *Рядом* называется бесконечная сумма чисел $x_n$ (числовой ряд): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ или функций $f_n(x)$ (функциональный ряд): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Соответственно, для случая комплексных переменных числовым рядом будет сумма комплексных чисел $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ или функций комплексной переменной $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

**Определение.** *Частичной суммой ряда* $S_n$ называется сумма его $n$ первых членов: $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$. А суммой ряда – предел последовательности частичных сумм при $N \to \infty$: $S = \lim_{N\to\infty} S_N$.

**Определение.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей его членов, то есть если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Так как непосредственно, используя определение предела, вычислять суммы рядов затруднительно, существует ряд признаков сходимости ряда.

**Необходимый признак сходимости ряда**: пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Достаточных признаков значительно больше, из них ограничимся упоминанием признака Даламбера – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, если $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$ и Коши: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$.

Для функциональных рядов большое значение имеет равномерная сходимость (это такая сходимость, что значение переменной функций не оказывает на неё влияния).

**Определение.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно* в области $D$ к функции комплексного переменного $f(z)$, если для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что при всяком номере $n > N(\varepsilon)$ будет справедливо неравенство: $\left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| < \varepsilon$ для всякого $z \in D$.

Такими определениями пользоваться непосредственно очень неудобно, поэтому есть ряд теорем, позволяющих резко упростить вычисления.

**Признак Вейерштрасса**: Если всюду в области $D$ члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ могут быть оценены сверху членами абсолютно сходящегося числового ряда, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в области $D$.

Наконец, есть ряд теорем, устанавливающих свойства равномерно сходящихся функциональных рядов, также известные как теоремы Вейерштрасса:

**Теорема (о непрерывности).** Если функции $f_n(z)$ непрерывны в области $D$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ в этой области сходится равномерно к функции $f(z)$, то сама функция $f(z)$ также непрерывна в области $D$.

**Определение.** Кривая называется *кусочно-гладкой*, если она может быть разбита на конечное число кривых, на каждой из которых функции, задающие кривую, обладают непрерывными производными.

**Теорема (о почленном интегрировании).** Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывных функций $f_n(z)$ сходится равномерно в области $D$ к функции $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой кривой $C$, целиком лежащий в области $D$, можно вычислить путём почленного интегрирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, то есть $\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)dz$.

Все перечисленные выше теоремы мало отличаются от соответствующих теорем функций вещественной переменной, поэтому их возможно привести без доказательства. Дальше мы рассмотрим гораздо более подробно теоремы, специфичные именно для функций комплексного переменного.

**Теорема Вейерштрасса.** Пусть функции $f_n(z)$ – аналитические в области $D$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\bar{D}'$ области $D$ к функции $f(z)$. Тогда

**1.** $f(z)$ **– аналитическая функция в области** $D$.

*Доказательство*: Возьмём произвольную точку $z_0 \in D$, построим односвязную замкнутую область $\bar{D}'$, содержащую точку $z_0$. В этой точке, по теореме о непрерывности, функция $f(z)$ непрерывна. Проинтегрируем $f(z)$ по произвольному замкнутому контуру $C$, лежащему в этой области. По теореме о почленном интегрировании, получаем соотношение:

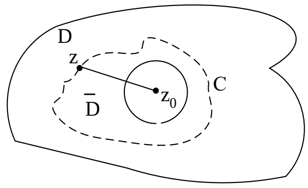



Рис. 15. Замкнутый контур $C$. Окружность радиуса $d$: $|z-z_0|>d$. Внутри замкнутого контура $C$ область $\bar{D}$

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C f_n(z)dz.$$

В силу аналитичности функций $f_n(z)$ интеграл от них будет равен нулю, следовательно, $\oint_C f(z)dz = 0$. А по теореме Морера это означает аналитичность функции $f(z)$.

**2. Производная суммы ряда может быть получена почленным дифференцированием членов ряда** $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$.

*Доказательство:* Возьмём произвольную точку $z_0 \in D$, построим односвязную замкнутую подобласть $\bar{D}'$, содержащую точку $z_0$. Выберем в $\bar{D}'$ произвольный замкнутый контур $C$, целиком лежащий в области $\bar{D}'$, такой, что точка $z_0$ находится внутри области, охваченной $C$.

Потребуем, чтобы наименьшее расстояние от $C$ до $z_0$ было больше, чем некое число $d_0 > 0$, и разделим обе части соотношения $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z)$ на $(z-z_0)^{k+1}$:

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

На сходимости ряда это не скажется, на аналитичности функций – так же, т.к. ряд умножен просто на постоянную.

Теперь проинтегрируем обе части соотношения $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ по замкнутому контуру $C$ рисунка 15. Получим:

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \oint_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

и заметим, что ряд состоит из непрерывных функций, то есть суммирование и интегрирование можно поменять местами:

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C \frac{f_n(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

Согласно формуле Коши,

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}},\quad f_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\oint_C\frac{f_n(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}},$$

откуда получаем: $\frac{2\pi i}{k!}f^{(k)}(z)=\frac{2\pi i}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$, или $f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$, что и требовалось доказать.

**3. Ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\bar{D}'$ области $D$.**

*Доказательство:* Рассмотрим остаток ряда для функции $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$, то есть ряд $r_N(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(z)$. Так как ряд сходится, то и его остаток сходится. По доказанному, $r_N(z)$ есть аналитическая, $k$ раз дифференцируемая функция. Следовательно, $r_N{}^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\frac{r_N(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}$, причём $r_N^{(k)}(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно, следовательно, верна оценка: $|r_N(z)|<\varepsilon\cdot\frac{2\pi d^{k+1}}{k!L}$, где $L$ – длина контура $C$. Теперь оценим интеграл: $r_N{}^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\frac{r_N(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}$.

Верно следующее: $\left|r_N{}^{(k)}(z)\right|=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\left|\frac{r_N(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right|ds<\varepsilon$. Это верно для всякого $\bar{D}'$, что и требовалось доказать.

Для сведения приведём ещё одну теорему, доказательство которой можно найти в [6]:

**Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса).** Пусть функции $f_n(z)$ являются аналитическими в области $D$, непрерывными в $\bar{D}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на границе $\Gamma$ этой области. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно и в $\bar{D}$.

Итак, мы рассмотрели основные теоремы общего характера. Как выяснилось, они в целом мало отличаются от соответствующих теорем функций вещественной переменной.

Далее мы будем рассматривать степенные ряды. Центральное значение в теории степенных рядов в теории функций вещественной переменной имеет теорема Абеля. Она переносится на случай комплексного переменного без изменений, доказательство сходное.

**Теорема (теорема Абеля).** Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в любой точке $z$, удовлетворяющей условию $\left|z - z_0\right| < \left|z_1 - z_0\right|$, причём в круге $\left|z - z_0\right| \leq \rho$ радиуса $\rho$, меньшего $\left|z_1 - z_0\right|$, ряд сходится равномерно.

**Следствие 1.** Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$ расходится в некоторой точке $z_1$, то он расходится и во всех точках $z$, удовлетворяющих неравенству $\left|z - z_0\right| > \left|z_1 - z_0\right|$.

**Следствие 2.** Для всякого степенного ряда существует такое число $R$, что внутри круга $\left|z - z_0\right| < R$ данный степенной ряд сходится, а вне этого круга расходится.

**Следствие 3.** Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.

**Следствие 4.** Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причём радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.

**Следствие 5.** Коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$ выражаются через значения суммы ряда $f\left(z\right)$ и её производных в центре круга сходимости по формулам: $c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}\left(z_0\right)$.

**Следствие 6**. Радиус сходимости $R$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$ определяется формулой $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n}}$. Отметим, что здесь рассматривается не обычный предел, которого у последовательности коэффициентов может и не быть. Под пределом понимается так называемый верхний предел последовательности, то есть наибольшая предельная точка.

В теории функций вещественного переменного степенные ряды играли большую роль; в них раскладывали функции вещественного переменного. И ключевой формулой здесь была формула Тейлора, позволяющая поставить каждой бесконечно-дифференцируемой функции в соответствие степенной ряд – ряд Тейлора, имеющий вид: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ .

**Теорема (теорема Тейлора).** Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, причём этот ряд определён однозначно.

*Доказательство.* Выберем произвольную точку $z$ внутри круга $|z-z_0|<R$ и построим окружность $C_\rho$ с центром в точке $z_0$ радиуса $\rho<R$, который содержал бы точку $z$ внутри (рис. 16).

Точка $z$ – внутренняя точка области $|z-z_0|<\rho$, в ней функция $f(z)$ по условию теоремы аналитическая. Следовательно, по формуле Коши получаем: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)}$.

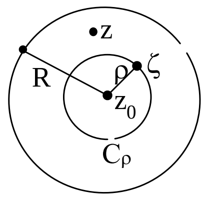


Рис. 16. Взаимное расположение $z_0$, $z$ и $\varsigma$

В подынтегральном выражении выполним преобразование:

$\frac{1}{\varsigma-z}=\frac{1}{\varsigma-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}}=\frac{1}{\varsigma-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right)^n$, так как $\left|\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right|<1$, и, следовательно, мы можем разложить всю дробь $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}}$ в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Построенный ряд на окружности $C_\rho$ (то есть при $\varsigma\in C_\rho$) сходится равномерно по $\varsigma$, и его можно оценить сверху рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$.

Подставляя в формулу Коши $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)}$, получаем соотношение: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma(z-z_0)^n$. Заметим, что $(z-z_0)^n$ не зависит от величины $\varsigma$, и может быть вынесено за знак интеграла:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma .$$

Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma$ обозначим за $c_n$, тогда ряд примет вид:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n .$$

Заметим, что окружность $C_\rho$ можно, в силу теоремы Коши, заменить любым замкнутым контуром, лежащим внутри круга $|z-z_0|<R$ и содержащим точку $z_0$ внутри. В силу произвольности выбора точки $z$ ряд сходится к $f(z)$, причём в круге $|z-z_0|<R$ сходится равномерно.

Единственность разложения рекомендуется доказать самостоятельно.

**1. Вопросы для самоконтроля:**

1. Что такое криволинейный интеграл второго рода (криволинейный интеграл по координатам)?
2. Формула Грина.
3. Как ввести параметризацию в криволинейном интеграле второго рода?
4. Формула Коши.
5. Для каких функций применима формула Коши?
6. Формула Коши для старших производных.
7. Сформулируйте теорему Морера.
8. Сформулируйте теорему Лиувилля.

**2. Вычислите интеграл, пользуясь формулой Коши:**

**Пример**. Вычислите интеграл, пользуясь формулой Коши: $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{z^2+1}$.

*Решение.* Выясним, есть ли точки, в которых нарушается аналитичность функции под знаком интеграла внутри заданного контура. Так как область кончена, то сложности могут возникнуть только тогда, когда знаменатель обращается в нуль. Выясним, при каких значениях он обращается в нуль и попадают ли какие-либо из этих значений внутрь заданного контура.

Знаменатель имеет вид: $z^2+1$, оттуда несложно видеть, что, если $z=\pm i$, то аналитичность подынтегрального выражения нарушается. Из двух значений $z_1=-i$ и $z_2=+i$ внутри круга $|z-i|\le 1$ находится только $z_2=+i$. Следовательно, формулой Коши можно воспользоваться так:

$$\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{z^2+1}=\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{(z+i)(z-i)}=\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{\left(\frac{e^z}{z+i}\right)}{(z-i)}dz=2\pi i\left.\frac{e^z}{z+i}\right|_{z=i}=2\pi i\frac{e^i}{i+i}=$$

$$=2\pi i\frac{e^i}{2i}=\pi e^i.$$

| | | |
|---|---|---|
| 88. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5}\frac{dz}{z^3-z}$; | 89. $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=1}\frac{(z-1)dz}{z^2+6z+8}$; | 90. $\oint\limits_{\lvert z+e^{i\pi/4}\rvert=1}\frac{\sin z}{z^4+1}dz$; |
| 91. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1}\frac{z^4dz}{z^3-1}$; | 92. $\oint\limits_{\lvert z+i\rvert=1}\frac{\cos z dz}{z^2+1}$; | 93. $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=2}\frac{(z-i)dz}{z^2+1}$. |

**3. Вычислите интеграл, пользуясь формулой Коши для производных:**

**Пример**. Вычислите интеграл, пользуясь формулой Коши для производных функции: $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^3}$.

*Решение.* Выясним, есть ли точки, в которых нарушается аналитичность функции под знаком интеграла внутри заданного контура. Так как область кончена, то сложности могут возникнуть только тогда, когда знаменатель обращается в нуль. Выясним, при каких значениях он обращается в нуль и попадают ли какие-либо из этих значений внутрь заданного контура.

Знаменатель имеет вид: $z^3$, оттуда несложно видеть, что, если $z=0$, то аналитичность подынтегрального выражения нарушается. Кроме того, в знаменателе это выражение стоит в третьей степени. Следовательно, для решения задачи нужно воспользоваться формулой Коши $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^{n+1}}d\varsigma$.

Функция $f(z)=e^z$, степень третья, поэтому по формуле Коши получаем: $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^3}=\left.\frac{\left(e^z\right)''}{2!}\right|_{z=0}=\frac{\left.e^z\right|_{z=0}}{2!}=\frac{1}{2}$.

| | | |
|---|---|---|
| 94. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5}\frac{(z^3+1)dz}{z^4+z^2}$; | 95. $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=1}\frac{dz}{z(z-2)^3}$; | 96. $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=1}\frac{\sin z}{(z^2+1)^2}dz$; |
| 97. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1}\frac{zdz}{(z^3-1)^2}$; | 98. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1}\frac{\cos z dz}{(z+1)^2}$; | 99. $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=2}\frac{e^z dz}{(z^2+1)^2}$. |

### *Ряды аналитических функций. Примеры*

Ранее мы рассмотрели ряды Тейлора. Выполним разложение функции в ряд Тейлора. Для этого выберем функцию $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. Эта функция аналитическая на всей комплексной плоскости, исключая точки $z=i$ и $z=-i$.

**Пример.** Разложим в ряд Тейлора функцию $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. Сначала разложим эту функцию в круге $|z|<1$. Для этого отметим, что сумма геометрической прогрессии $1+x+x^2+...+x^n+...=\dfrac{1}{1-x}$, где $|x|<1$, следовательно, мы можем функцию рассматривать как сумму прогрессии со знаменателем $-z^2$. Таким образом, получаем: $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$.

Теперь выполним разложение функции $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ в круге с центром в единице, т.е. если $|z-1|<\sqrt{2}$. Удобно разложить дробь на сумму из двух дробей, каждую из которых несложно затем разложить в ряд Тейлора: $\dfrac{1}{1+z^2}=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{i-z}+\dfrac{1}{i+z}\right)$. Разложение каждой дроби по отдельности в этом случае можно выполнить и непосредственно, пользуясь формулой Тейлора. В результате получим ряд:

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(1-i)^n}-\frac{1}{(1+i)^n}\right)(z-1)^n.$$

Учитывая, что $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, получаем:

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n.$$

### *Следствия*

Из формулы Коши следует, что, задав аналитическую функцию на замкнутой кривой, мы можем вычислить её значения также и всюду в области, ограниченной этой кривой. Следовательно, чтобы определить функцию в области, вовсе не обязательно задавать её в каждой точке этой области, достаточно задать её на некотором множестве точек.

**Определение.** Точка $z_0$ называется *нулём аналитической функции* $f(z)$, если $f(z_0)=0$.

**Определение.** Пусть в точке $z_0$, нуле аналитической функции $f(z)$, существует разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Точка $z_0$ называется *нулём функции* $f(z)$ *порядка* $k$, если все коэффициенты $c_j$, с нулевого до $k$-го включительно, равны нулю: $c_0=c_1=c_2=...=c_k$.

Из определения следует, что в нуле порядка $k$ функцию $f(z)$ можно представить так: $f(z)=(z-z_0)^k g(z)$, где $g(z_0)\neq 0$.

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $D$ и обращается в нуль в различных точках $z_k \in D$, $k=1,2,3,...$. Если последовательность точек $\{z_k\}$ сходится к пределу $z_0$, принадлежащему той же области, то функция $f(z)$ тождественно равна нулю в области $D$.

*Доказательство.* Точка $z_0$ принадлежит области аналитичности функции, следовательно, в точке $z_0$ можно выполнить разложение функции $f(z)$ в ряд: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, причём радиус $R$ сходимости этого ряда не меньше, чем расстояние от точки $z_0$ до границы области.

Рассмотрим последовательность точек $\{z_k\}$ и соответствующую последовательность $\{f(z_k)\}$. Заметим, что все члены последовательности $\{f(z_k)\}$ равны нулю, так как все $\{z_k\}$ – нули функции $f(z)$. Следовательно, в силу непрерывности, соответствующая последовательность значений функции сходится к нулю, то есть $f(z_0)=0$. Следовательно, $z_0$ – нуль функции, и она может быть представлена в виде: $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$. А это означает, что коэффициент $c_0$ в ряду $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ равен нулю.

Теперь заметим, что функция $\varphi(z)$ – также непрерывна и также обращается в нуль во всех точках $\{z_k\}$. Следовательно, повторяя все приведённые выше рассуждения, получим, что $\varphi(z)=(z-z_0)g(z)$, то есть коэффициент $c_1=0$. Эти рассуждения можно повторить любое количество раз и получить, что все коэффициенты ряда Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ равны нулю. А это означает, что и сама функция – тождественный нуль.

**Следствие 1.** Любая не равная тождественно нулю функция имеет в замкнутой ограниченной области только конечное число нулей.

**Следствие 2.** Если точка $z_0$ – нуль бесконечного порядка функции $f(z)$, то функция есть тождественный нуль.

**Следствие 3.** Аналитическая функция может иметь бесконечное число нулей в открытой или неограниченной области.

**Следствие 4.** Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в области $D$. Если в $D$ существует сходящаяся к некоторой точке $z_0 \in D$ последовательность различных точек $\{z_k\}$, в которых значения функций $f(z)$ и $g(z)$ совпадают, то $f(z)=g(z)$.

**Следствие 5.** Если функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитические в области $D$, совпадают на некоторой кривой $L$, то они тождественно равны в области $D$.

**Следствие 6.** Если функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитические в соответствующих областях $D_1$ и $D_2$, таких, что у них есть общая подобласть $D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, совпадают в области $D$, то существует единственная аналитическая функция $F(z)$, такая, что $F(z)=\begin{cases} f(z), & z \in D_1 \\ g(z), & z \in D_2 \end{cases}$.

## 3. Аналитическое продолжение

### *Элементарные функции комплексной переменной*

Роль аналитического продолжения, построенного нами ранее, сложно переоценить. Так, с помощью аналитического продолжения можно взять и продолжить на комплексную плоскость с вещественной оси функции вещественного переменного. Всё, что для этого требуется – заменить в ряде Тейлора вещественные переменные на комплексные. Скажем, пусть есть ряд Тейлора для синуса: $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Тогда функцию синуса можно получить и с помощью комплексного переменного, заменив вещественную переменную на комплексную: $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Свойства синусов при этом сохраняются, так как ряд останется неизменным.

Приведём таблицу основных рядов:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n};$$

$$\arcsin z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) z^{2n+1}}{2^n \cdot n! \cdot (2n+1)}.$$

Сохранение форм записи свойств гарантирует следующая теорема:

**Теорема.** Если функции $f_i(z)$ являются аналитическими функциями $z$ в области $D$, содержащей отрезок $[a;b]$ вещественной оси, то из соотношения $F[f_1(x),\ldots, f_n(x)] = 0$ при $x \in [a;b]$ следует соотношение $F[f_1(z),\ldots, f_n(z)] = 0$ для $z \in D$.

Сходная теорема есть для производных этих функций [6].

Следовательно, все соотношения, построенные для функций вещественных переменных, переносятся на случай комплексного переменного для аналога этих функций без каких-либо изменений.

Скажем, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ точно так же запишется для комплексной переменной: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Формула синуса суммы $\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\sin(x_2)$ примет вид:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$$

и так далее без какого-либо изъятия.

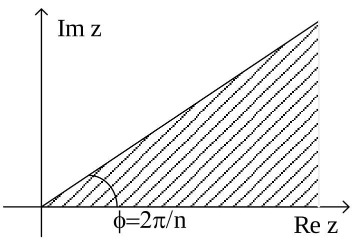
### *Отображения*

Функции вещественной переменной осуществляют отображение участков вещественной оси, называемых областью определения функций, на некоторое множество – область значений вещественной функции. Если взять пару чисел – число из области определения и соответствующее ему число из области значения и построить точку на плоскости, то мы получим график функции.

Функция комплексного переменного осуществляет отображение области определения на область значений, но, так как каждое комплексное число соответствует паре вещественных, то столь простое соотношение построить, конечно, не удастся. Но можно указать, как отображаются некоторые области теми или иными функциями комплексной переменной.

$n$ **-ая степень.**

Сектор, задаваемый углом $\phi = \dfrac{2\pi}{n}$ отображается на всю комплексную плоскость (рис. 17 а, б).



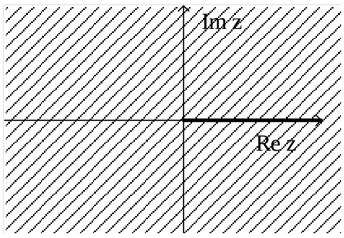




Рис. 17. Отображения

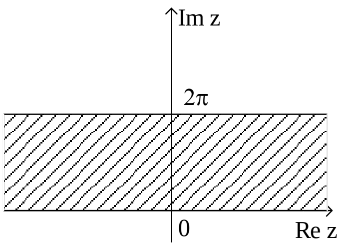
а) исходный сектор для отображения $z^n$

б) результат отображения $z^n$ – вся плоскость с выброшенной положительной полуосью абсцисс

При этом оба луча угла отображаются на участок, выделенный жирной линией на рисунке (то есть на положительную часть оси абсцисс). Само же начал координат остаётся неподвижным.

Заметим, что корень $n$-ой степени выполняет обратное отображение.

**Показательная функция** $e^z$**.** Показательная функция будет отображать горизонтальную полосу на всю числовую плоскость. При этом линии, ограничивающие полосу, отображаются на положительную часть вещественной оси (рис. 18).



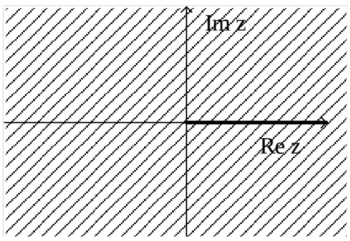




Рис. 18. Отображения: а) исходная неограниченная горизонтальная полоса; б) результат отображения горизонтальной полосы с помощью отображения $e^z$

Обратное отображение выполняет логарифм.

Синус и косинус отображают вертикальную полуполосу на всю комплексную плоскость и т.д.

Пусть есть две функции $f(z)$ и $g(z)$, каждая из которых является аналитической в своей области: $f(z)$ аналитическая в области $D_1$, $g(z)$ –

аналитическая в области $D_2$. Пусть они совпадают друг с другом в общей части областей $D_1$ и $D_2$, то есть в области $D_{12} = D_1 \bigcap D_2$. Тогда во всей области $D = D_1 \bigcup D_2$ можно построить функцию $F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_1 \\ g(z), & z \in D_2 \end{cases}$. В общей части можно пользоваться любой из этих двух функций – $f(z)$ и $g(z)$ в этой части совпадают.

Ситуация становится хуже, если в общей области $D_{12} = D_1 \bigcap D_2$ функции $f(z)$ и $g(z)$ различны. Тогда функцию $F(z)$ можно получить двумя способами:

$$F_1(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_1 \\ g(z), & z \in D_2 \setminus D_{12} \end{cases} \quad \text{или} \quad F_1(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_1 \setminus D_{12} \\ g(z), & z \in D_2 \end{cases}.$$

Следовательно, функция $F(z)$ получается многозначной в общей части $D_{12} = D_1 \bigcap D_2$, и мы вынуждены будем выбирать то или иное значение функции из двух возможных.

Чтобы решить проблему, используют понятие ветви функции. Можно считать, что функция $F(z)$ имеет в области $D_{12} = D_1 \bigcap D_2$ две ветви – $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

Однако принято делать по-другому: мы будем рассматривать одну функцию $F(z)$, но заданную на более сложном многообразии. Многообразие это состоит из областей $D_1$ и $D_2$, которые склеены по многообразию $D_{12}$. А само множество $D_{12}$ дополнительно «подклеено» к области $D$ дважды. Получается многообразие из двух склеенных листов: область $D$ – первый лист, и область $D_{12}$ – второй и третий. Что касается функции $F(z)$, то она построена на всех трёх листах. Но на первом листе в области $D_{12}$ функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают, на втором – только значения функции $f(z)$, на третьем – только $g(z)$.

Построенная таким образом поверхность называется *поверхностью Римана*.

**1. Вопросы для самоконтроля:**

1. Что такое ряд Тейлора? Ряды каких основных элементарных функций Вы знаете?
2. Что такое нуль аналитической функции? Что такое – порядок нуля?
3. Как можно построить аналитическое продолжение функции?
4. Поведение ряда внутри круга сходимости и вне него. Как ведёт себя ряд на границе круга сходимости?

5. Какая сходимость ряда – равномерная? К какой функции сходится равномерно сходящийся ряд?

6. Какие действия можно выполнить с равномерно сходящимися рядами?

7. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о мажорировании функционального ряда числовым.

**Пример**. Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$.

*Решение.* Несложно видеть, что предложенный ряд является степенным. Следовательно, несложно найти радиус его сходимости с помощью формулы Даламбера: $R=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}$. Так как коэффициенты ряда $c_n=\frac{n}{2^n}$, то $c_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$, откуда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2^n}\cdot\frac{2^n\cdot 2}{n+1}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=2.$$

Итак, если $|z|<R=2$, то ряд сходится, если $|z|>2$, то ряд расходится.

Выясним, что происходит на границе ряда. Для этого представим комплексное число $z$, такое, что его модуль равен 2, $|z|=2$, в показательной форме: $z=2\cdot e^{i\varphi}$, где угол $\varphi\in[0;2\pi]$, и подставим в ряд. В результате получим соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\left(2\cdot e^{i\varphi}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}2^n\cdot e^{i\varphi n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot e^{i\varphi n}.$$

Несложно видеть, что такой ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Более того, модуль члена этого числового ряда неограниченно растёт. Таким образом, всюду на границе ряд расходится.

**2. Найдите радиус сходимости ряда. Если возможно, исследуйте границу круга сходимости:**

| | | |
|---|---|---|
| 100. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; | 101. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; | 102. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$; |
| 103. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^n$; | 104. $\sum_{n=1}^{\infty}z^{n^2}$; | 105. $\sum_{n=1}^{\infty}z^{2^n}$; |
| 106. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n z^n$; | 107. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n z^n$; | 108. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(in)\cdot z^n$. |

**Пример.** Разложите в ряд Тейлора функцию $f(z)=\frac{z}{z-3}$.

*Решение.* Преобразуем функцию $f(z)=\frac{z}{z-3}$.

$f(z)=\frac{z}{z-3}=\frac{z-3+3}{z-3}=1+\frac{3}{z-3}=1+3\cdot\frac{1}{z-3}$. Дальше все действия будем выполнять с функцией $g(z)=\frac{1}{z-3}$. Найдём производные любого порядка в точке $z=0$: $g^{(n)}(z)=\left(\frac{1}{z-3}\right)^{(n)}$. Для этого будем вычислять все производные подряд:

$$g'(z)=\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left((z-3)^{-1}\right)'=(-1)(z-3)^{-2},$$

$$g''(z)=\left(\frac{1}{z-3}\right)''=\left((z-3)^{-1}\right)''=(-1)(-2)(z-3)^{-3} \text{ и так далее.}$$

Несложно видеть, что $g^{(n)}(z)=\left(\frac{1}{z-3}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)(z-3)^{-n-1}$.

Соответственно, $g^{(n)}(0)=(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)(-3)^{-n-1}=\frac{(-1)}{3^{n+1}}n!$.

Так как ряд Тейлора имеет вид $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, то

$$\frac{1}{z-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{(-1)}{3^{n+1}}n!}{n!}z^n=(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^{n+1}n!}z^n=(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Учитывая, что $f(z)=1+3\cdot\frac{1}{z-3}$, получаем: $\frac{z}{z-3}=1+(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$.

**3. Разложите указанные функции в ряды Тейлора и укажите область сходимости построенного ряда:**

| | | |
|---|---|---|
| 109. $\sin^2 z$; | 110. $\sqrt{z+i}$; | 111. $\frac{1}{az+b}$; |
| 112. $\frac{z}{z^2-4z+13}$; | 113. $\frac{z^2}{(z+1)^2}$; | 114. $\frac{z}{z+2}$, $z_0=1$; |
| 115. $\frac{z}{z^2-2z+5}$, $z_0=1$; | 116. $\ln\frac{z+1}{1-z}$, $z_0=0$; | 117. $\ln z$, $z_0=1$. |

### *Аналитическое продолжение через границу*

Теперь рассмотрим важный приём, позволяющий продолжить аналитическую функцию за границу области, где она задана. Для этого сначала рассмотрим случай, когда аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$ заданы в областях $D_1$ и $D_2$, имеющих общую границу $\Gamma$ (рис. 19). Зададим функцию $F(z)$ в области $D \equiv D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ следующим образом:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_1 \cup \Gamma \\ g(z), & z \in D_2 \cup \Gamma \end{cases}.$$

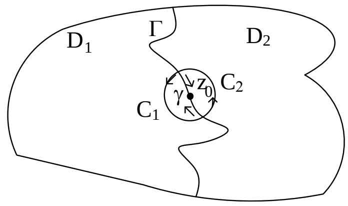



Рис. 19. Граница $\Gamma$ между областями $D_1$ и $D_2$

Покажем, что функция $F(z)$ является аналитической в области $D$. Для этой цели возьмём произвольную точку $z_0$ на границе $\Gamma$ и построим окружность $C$ с центром в этой точке так, чтобы окружность целиком лежала бы в области $D$. Рассмотрим интеграл Коши по выбранной нами окружности: $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}$.

Отметим, что полученная в результате функция – аналитическая в силу свойств интеграла типа Коши.

Теперь докажем, что функция $\Phi(z)$ тождественно совпадает с $F(z)$. Для этого разобьём интеграл $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}$ на два интеграла следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1+\gamma} \frac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma+C_2} \frac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}.$$

Заметим, что мы добавили к каждому контуру часть границы $\Gamma$, лежащую внутри окружности. Это возможно, так как мы будем проходить этот участок границы дважды в двух противоположных направлениях, следовательно, на интеграл это не повлияет.

Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1+\gamma} \dfrac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}$ несложно вычислить, заметив, что контур замкнутый и целиком лежит в области $D_1$, следовательно, мы можем записать $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_1+\gamma} \dfrac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_1+\gamma} \dfrac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}$. Если точка $z \in D_1$, то тогда этот интеграл равен $f(z)$. Если же нет, то тогда интеграл равен нулю.

Аналогично, интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+C_2}\frac{F(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1+\gamma}\frac{g(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$ равен или $g(z)$, или нулю. Следовательно, получаем:

$$\Phi(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D_1\cup\Gamma \\ g(z), & z\in D_2\cup\Gamma \end{cases}=F(z),$$ что и требовалось доказать.

Для иллюстрации данного метода, имеющего большое значение, приведём несколько примеров.

**Пример.** Функция $w=\sqrt{z}$. Пусть $z$ может быть представлен с помощью показательной функции как $z=\rho e^{i(\varphi+2\pi n)}$. Согласно правилу извлечения квадратного корня, $w=re^{i\xi}=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi+2\pi n}{2}}=\sqrt{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi n\right)}$. Несложно видеть, что число $n$ в показателе комплексной функции может принимать два значения 0 и 1, остальные будут дублироваться. Следовательно, ветвей у функции $w=\sqrt{z}$ будет две.

Выберем ту из них, что является аналитическим продолжением вещественного корня, то есть ветвь с $n=0$, то есть $w=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, при этом угол $\varphi\in[0;2\pi]$, то есть вся комплексная плоскость.

Несложно видеть, что модуль полученного значения $r$ (то есть модуль $w$) будет произвольным неотрицательным числом, а малый аргумент $\xi=\frac{\varphi}{2}$ будет принимать значения $\xi\in[0;\pi]$, что соответствует верхней полуплоскости (несложно заметить, что вторая ветвь будет задавать нижнюю полуплоскость). Соответственно, разрез – положительная часть вещественной оси комплексной плоскости.

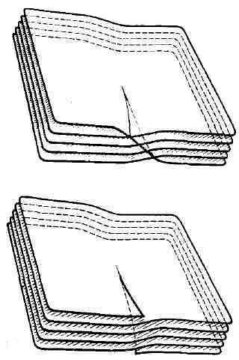


Рис. 20. Склеивание римановой поверхности для $z^4$

Теперь зададим $\varphi\in[2\pi;4\pi]$. В этом случае $\xi=\frac{\varphi}{2}$ будет находиться в промежутке $\xi\in[\pi;2\pi]$, то есть будет соответствовать нижней полуплоскости. Следовательно, чтобы нам получить отображение на всю комплексную плоскость $w$, необходимо взять две плоскости $z$. При этом разрезы у них будут проходить по положительной части вещественной оси. Взяв разные разрезы, склеим их так, как показано на рис. 20 – схема склеивания – приведён для корня четвёртой степени, в нашем случае будут только два листа (рис. 21).

**Пример.** Функция $w = Ln\, z$. Пусть $z$ может быть представлен с помощью показательной функции как $z = \rho e^{i(\varphi + 2\pi n)}$. Согласно правилу вычисления логарифма, $w = re^{i\xi} = \ln \rho + \ln e^{i(\varphi+2\pi n)} = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi n)$. Число $n$ в показателе комплексной экспоненты принимает любые целые значения. Несложно видеть, что, если $n = 0$, то для мы получим полосу, параллельную вещественной оси. Следовательно, для построения полной плоскости $w$ нам будет необходимо «подклеить» бесконечно много комплексных плоскостей. Получающаяся риманова поверхность приведена на рисунке 22.

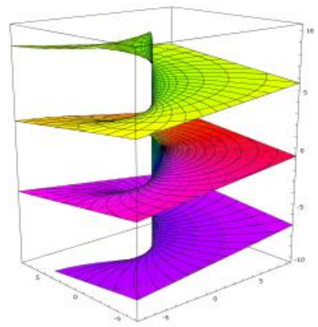


Рис. 21. Склеивание двух листов для $z^2$

Теперь рассмотрим примеры продолжения с помощью степенных рядов.

**Пример.** Пусть есть ряд для функции: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Несложно, применив радикальный признак сходимости Коши, удостовериться, что ряд сходится, если $|z| < 1$. В этом случае ряд сходится к функции $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

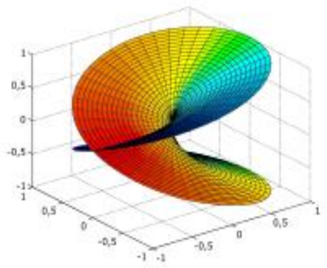


Рис. 22. Риманова поверхность для $w = Ln\, z$

Вне круга $|z| < 1$ ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ будет расходящимся, то есть функция $f(z)$ не определена за пределами круга $|z| < 1$.

Попробуем определить функцию за пределами круга. Возьмём некоторую точку $z_0$ внутри круга $|z| < 1$ (то есть $|z_0| < 1$), и попробуем построить ряд для функции $f(z)$ за пределами этого круга.

Ряд имеет вид: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Вычислим производные. $f'(z_0)=\dfrac{1}{(1-z_0)^2}$ и т.д. Общая формула производной $n$-го порядка $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{1}{(1-z_0)^{n+1}}$.

Следовательно, ряд Тейлора примет вид: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$.

Этот ряд сходится, если $|z-z_0|<|1-z_0|$.

Выбираем в качестве нового центра разложения какую-либо точку внутри круга $|z-z_0|<|1-z_0|$, строим новое разложение и так далее, пока мы не займём всю плоскость – кроме точки $z=1$. В этой точке функция не существует и все её ряды будут расходящимися.

Заметим, что точка $z=1$ будет граничной для любого из построенных нами кругов (рис. 23). Эта точка представляет интерес, и мы рассмотрим её отдельно.

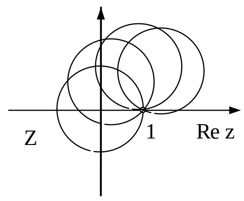



Рис. 23. Разложение в ряд Тейлора

### *Правильные и особые точки аналитической функции*

Пусть функция $f(z)$ задана в области $D$, ограниченной контуром $\Gamma$.

**Определение.** Точка $z_0\in\bar{D}$ называется *правильной точкой функции* $f(z)$, если существует сходящийся степенной ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, который в точках пересечения области $D$ и круга сходимости $|z-z_0|<R$ сходится к функции $f(z)$.

Соответственно, те точки области $z_0\in\bar{D}$, которые не являются правильными точками, называются *особыми*.

Пример особой точки – точка $z=1$ для функции $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$.

Относительно особых точек и рядов функций комплексной переменной справедливо следующее утверждение:

**Теорема.** На границе круга сходимости лежит хотя бы одна особая точка аналитической функции $F(z)$, к которой сходится ряд.

*Доказательство.* Пусть у нас есть некоторый ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ для функции $F(z)$. Пусть верно обратное, то есть ряд сходится в круге $K$ радиуса $R$, но на границе круга $K$ – окружности $C$ нет ни одной особой точки, все точки $\varsigma \in C$ – правильные. Это означает, что для любой точки $\varsigma \in C$ существует такое число $\rho(\varsigma) > 0$, что в общей части круга $K$ и своего круга сходимости $|z-\varsigma| < \rho(\varsigma)$ соответствующий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\varsigma)(z-\varsigma)^n$ сходится к $f(z)$.

Рассмотрим функцию $\rho(\varsigma)$, определённую на окружности С (рис. 24). Выберем две произвольные точки $\varsigma_1$ и $\varsigma_2$, принадлежащие $C$, и докажем, что для них верно соотношение: $|\rho(\varsigma_1)-\rho(\varsigma_2)| \le |\varsigma_1-\varsigma_2|$. Действительно, пусть это неверно, и существует такое положительное число $\delta > 0$, что $\rho(\varsigma_1)-\rho(\varsigma_2) = |\varsigma_1-\varsigma_2| + \delta$. Следовательно, $\rho(\varsigma_1) = |\varsigma_1-\varsigma_2| + \delta + \rho(\varsigma_2)$, то есть круг с центром $\varsigma_2$ содержится в круге с центром $\varsigma_1$.

Рассмотрим ряды для функции $f(z)$ с центрами в этих точках:

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\varsigma_1)(z-\varsigma_1)^n$$

и

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\varsigma_2)(z-\varsigma_2)^n.$$

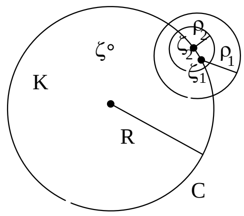



Рис. 24. Расположение точек в круге $K$. Радиусы $\rho_1(\varsigma)$ и $\rho_2(\varsigma)$ обозначены как $\rho_1$ и $\rho_2$

Круг сходимости второго ряда лежит внутри круга сходимости первого ряда. Оба ряда сходятся к одной и той же функции в общей части, следовательно, $f_1(z)$ есть аналитическое продолжение функции $f_2(z)$. Следовательно, в круге $|z-\varsigma_1| < \rho(\varsigma)$ определена аналитическая функция $f_1(z)$, совпадающая с $f_2(z)$. В силу теоремы Тейлора отсюда следует, что радиус сходимости $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\varsigma_2)(z-\varsigma_2)^n$ не меньше, чем $\rho(\varsigma_1)$, а это противоречит исходной посылке. Итак, $|\rho(\varsigma_1)-\rho(\varsigma_2)| \le |\varsigma_1-\varsigma_2|$.

Так как $|\rho(\varsigma_1)-\rho(\varsigma_2)| \le |\varsigma_1-\varsigma_2|$ – верно, то функция $\rho(\varsigma)$ равномерно непрерывна на кривой $C$. Действительно, соотношение $|\rho(\varsigma_1)-\rho(\varsigma_2)| < \varepsilon$

выполняется для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$, если только $|\varsigma_1 - \varsigma_2| < \varepsilon$. Так как функция $\rho(\varsigma) > 0$, то она ограничена снизу, и в силу своей непрерывности достигает на $C$ своей точной нижней грани $\rho(\varsigma) \geq \rho(\varsigma_0) = \rho_0 > 0$.

В силу единственности аналитического продолжения можно утверждать, что в круге $|z - z_0| < R + \rho_0$ определена однозначная аналитическая функция $F(z)$, совпадающая с функцией $f(z)$ в круге $|z - z_0| < R$. Следовательно, радиус сходимости исходного степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ должен быть $R + \rho_0$, что противоречит условию теоремы.

**Следствие.** Радиус круга сходимости степенного ряда определяется расстоянием от центра сходимости до ближайшей особой точки той аналитической функции, к которой сходится ряд.

### *Полная аналитическая функция*

**Определение.** Функция $F(z)$, полученная путём аналитического продолжения вдоль всевозможных цепочек областей, выходящих из области $D_1$ первоначального задания функции $f(z)$, называется *полной аналитической функцией*. Её область определения называется *естественной областью существования полной аналитической функции.*

**Определение.** Если область $D_1$ такова, что возможно аналитическое продолжение $f(z)$ на б**о**льшую область, то функцию $f(z)$ называют *элементом полной аналитической функции* $F(z)$.

**Определение.** Аналитическое продолжение $f_2(z)$ функции $f_1(z)$, заданной в области $D_1$ на область $D_2$, имеющей с $D_1$ общую часть $D_{12}$, будем называть *непосредственным аналитическим продолжением функции* $f_1(z)$.

**1. Вопросы для самоконтроля:**

1. Как аналитически продолжить функцию через границу, используя формулу Коши?
2. Как продолжить функцию с помощью ряда?
3. Какая точка называется правильной?
4. Какая точка называется особой?
5. Как расположены особые точки на границе круга сходимости ряда?
6. Что такое риманова поверхность?
7. Что такое точка ветвления?

**Пример**. Функция $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ разложена в ряд Тейлора в окрестности точки $z=a$, где $|a|<1$. При каких значениях $a$ это разложение позволяет аналитически продолжить функцию $f(z)$?

*Решение.* Из формулы Коши для сходимости ряда несложно выяснить, что ряд $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится внутри круга $|z|<1$, причём сходимость равномерная. Следовательно, ряд будет сходиться к аналитической функции; она известна, так как ряд представляет собой сумму геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше единицы. Таким образом, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=\dfrac{1}{1-z}$.

Теперь разложим функцию вновь – уже в окрестности точки $z=a$. В результате получим: $f^{(n)}(z)=\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$. Так как для разложения в ряд Тейлора в точке $z=a$ необходимо вычислить производные в точке $z=a$, то получим:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{(1-a)^{n+1}},$$

откуда, учитывая формулу ряда Тейлора, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, получаем:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{n!}{(1-a)^{n+1}}(z-z_0)^n \text{, или } f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-a)^{n+1}}.$$

С помощью радикальной формулы Коши получаем, что ряд сходится, если $\left|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(z-z_0)^n}{(1-a)^{n+1}}}\right|<1$, или $\left|\dfrac{z-z_0}{1-a}\right|<1$, или $|z-z_0|<|1-a|$. Таким образом, если точка $a$ не лежит на вещественной оси, мы получим круг, выходящий за рамки исходного круга сходимости, $|z|<1$. На часть круга за пределами исходной области сходимости $|z|<1$ мы и продолжим функцию с помощью ряда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-z_0)^n}{(1-a)^{n+1}}$.

**2. Сумма степенного ряда** $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ **разложена в ряд Тейлора в окрестности точки** $z=-\frac{1}{2}$**. На какую область будет тем самым продолжена функция** $f(z)$**?**

**3. Докажите, что функция** $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n}$ **может быть продолжена на большую область посредством ряда** $\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\ldots$

**4. Доказать, что функция** $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ **является аналитическим продолжением функции** $g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-z)^n}{n}$.

**Пример.** Найти порядок нуля $f(z)=z^2\left(e^{z^2}-1\right)$.

*Решение.* Воспользуемся стандартной формулой разложения для показательной функции: $e^{z^2}=1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$.

В результате получим, что выражение $f(z)=z^2\left(e^{z^2}-1\right)$ примет вид:

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots-1\right),$$ следовательно,

$$f(z)=z^2\left(\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=z^4\left(\frac{1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n-2}}{(2n)!}+\ldots\right).$$

Таким образом, мы получили, что порядок нуля в точке $z=0$ равен 4.

**5. Найти порядки всех нулей:**

| | | |
|---|---|---|
| 121. $z^2+9$; | 122. $\frac{z^2+9}{z^4}$; | 123. $z\sin z$; |
| 124. $\left(1-e^z\right)\left(z^2-4\right)^3$; | 125. $1-\cos z$; | 126. $\frac{\left(z^2-\pi^2\right)^2\sin z}{z^7}$; |
| 127. $\frac{1-ctg\,z}{z}$; | 128. $e^{tg\,z}$; | 129. $\sin^3 z$; |
| 130. $\frac{\sin^3 z}{z}$; | 131. $\sin z^3$; | 132. $\cos z^3$. |

## 4. Ряд Лорана и изолированные особые точки

Для представления функции в виде ряда, если в точке есть особенность разложения, мы не можем записать обычный ряд Тейлора, так как для него требуется непрерывность функции, а никакой непрерывности у функции нет. Но можно представить функцию в виде суммы отрицательных степеней, дающих особенность. Для этой цели применяется ряд Лорана.

**Определение.** Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$, где $z_0$ – некоторая фиксированная точка комплексной плоскости, а $c_n$ – коэффициенты ряда *называется рядом Лорана.*

Несложно видеть, что ряд можно переписать и с только положительными индексами, то есть в виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}.$$

Прежде всего, выясним, какова область сходимости ряда. Относительно первой суммы мы можем воспользоваться готовыми результатами: эта часть ряда, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$ будет сходиться в круге радиуса $R_1=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}}$ с центром в точке $z_0$. Внутри круга сходимости $\left|z-z_0\right|<R_1$ этот ряд сходится к некоторой аналитической функции $f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$.

Теперь рассмотрим второе слагаемое, $g\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}$. Чтобы определить область сходимости, выполним несложную замену переменной, представив $\varsigma=\dfrac{1}{z-z_0}$. В результате получим ряд: $\varphi\left(\varsigma\right)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\varsigma^n$. Это обычный степенной ряд, и область его сходимости – круг с центром в $\varsigma=0$ и радиуса $R_2=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_{-n}}}$, то есть $\left|\varsigma\right|<R_2$. Учитывая, что $\varsigma=\dfrac{1}{z-z_0}$, получаем: $\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right|<R_2$, и, переворачивая дробь, получаем

соотношение: $\left|z-z_0\right|>\frac{1}{R_2}$. Это означает, что область сходимости второй части ряда – внешность круга с центром в точке $z_0$ радиуса $\frac{1}{R_2}$.

Итак, первая часть ряда сходится, если $\left|z-z_0\right|<R_1$, а вторая – если $\left|z-z_0\right|>\frac{1}{R_2}$. Несложно совместить две эти величины в одну, если только $\frac{1}{R_2}<R_1$. Если это неравенство справедливо, то область сходимости ряда – круговое кольцо $\frac{1}{R_2}<\left|z-z_0\right|<R_1$ (рис. 25).

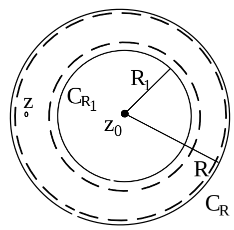



Рис. 25. Область сходимости ряда – круговое кольцо $R\equiv\frac{1}{R_2}<\left|z-z_0\right|<R_1$

В том же случае, если условие $\frac{1}{R_2}<R_1$ не выполнено, то ряд Лорана расходится на всей комплексной плоскости.

Выясним, можно ли разложить в ряд функцию.

**Теорема.** Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R\equiv\frac{1}{R_2}<\left|z-z_0\right|<R_1$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.

*Доказательство.* Фиксируем произвольную точку $z$ внутри кольца (см. рис. 25) $R<\left|z-z_0\right|<R_1$ и построим окружности $C_R$ и $C_{R_1}$ с центрами в $z_0$, радиусы которых удовлетворяют условиям $R<R'_2<R'<R_1$, $R'_2<\left|z-z_0\right|<R'$ (рис. 25, окружности выделены пунктирными линиями).

По формуле Коши для многосвязной области получаем:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\bar{R}_2}}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z},$$

причём второй, внутренний, контур проходится не против часовой стрелке, а по ней.

На окружности $C_R$ выполняется неравенство $\left|\frac{z-z_0}{\varsigma-z}\right|\le q<1$. Поэтому, воспользовавшись применявшимся ранее приёмом, можно расписать дробь $\frac{1}{\varsigma-z}$ в виде ряда:

$$\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{(\varsigma - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\varsigma - z_0}} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\varsigma - z_0} \right)^n .$$

В первом интеграле, $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \dfrac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z}$, можно воспользоваться полученной формулой и провести почленное интегрирование. Эта операция возможна в силу аналитичности функции:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \frac{1}{\varsigma - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\varsigma - z_0} \right)^n \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (z - z_0)^n \oint\limits_{C_R} \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} \right\}.$$

Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \dfrac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}$ обозначим за $c_n$, и в результате интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \dfrac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z}$ превратится в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Повторим рассуждения для второго интеграла, $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{\bar{R}_2}} \dfrac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z}$.

На $C_{R_1}$ будет выполнено соотношение $\left| \dfrac{\varsigma - z}{z - z_0} \right| < 1$, следовательно, повторяя вычисления, получим: $\dfrac{1}{\varsigma - z} = \dfrac{1}{z - z_0} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left( \dfrac{\varsigma - z_0}{z - z_0} \right)^n$. Здесь в результате почленного интегрирования получим: $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{\bar{R}_2}} \dfrac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$, где использовано обозначение $c_{-n} = -\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{\bar{R}_1}} \dfrac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{-n+1}}$.

Если мы сменим направление интегрирования, то тогда интеграл для коэффициента примет вид: $c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R_1}} \dfrac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{-n+1}}$.

Подынтегральные функции в $c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}^{-}} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{-n+1}}$ и $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_R} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}$ – аналитические в круговом кольце $R_2 < |z - z_0| < R$. Это означает, что если мы контуры деформируем, то сами интегралы не изменятся – при условии, что контуры останутся лежать в области аналитичности подынтегральных функций. Поэтому деформируем их так, чтобы объединить в один общий контур $C$, лежащий в кольце $R_2 < |z - z_0| < R$. Следовательно, для всякого целого числа $n$: $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}$. Возвращаясь к исходной формуле, получаем ряд Лорана: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. В силу произвольности выбора точки $z$, построенный ряд сходится к функции $f(z)$ всюду внутри кольца, причём в любом замкнутом кольце, содержащемся внутри $R < |z - z_0| < R_1$, сходимость равномерная.

Выясним, будет ли построенное разложение единственно. Пусть, кроме $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, есть другое разложение $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n$, где хотя бы один коэффициент $c'_n$ не совпадает с $c_n$.

Тогда внутри кольца будет справедливо равенство:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n.$$

Проведём окружность $C_{R_0}$ радиуса $R_0$, $R < R_0 < R_2$ с центром в точке $z_0$. Ряды сходятся на $C_{R_0}$ равномерно. Умножим их на $(z - z_0)^{-m+1}$, где $m$ – фиксированное целое число, и проинтегрируем почленно. Несложно видеть, что из всего ряда останутся только $c_m$. Следовательно, $c_m = c'_m$. В силу произвольности чисел получаем, что все коэффициенты совпадают.

### *Классификация изолированных точек*

**Определение.** Точка $z_0$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$, а точка $z_0$ – особая точка функции $f(z)$. В самой точке функция может быть не определена.

Тогда возможны три разных случая:

1. Ряд Лорана вовсе не содержит членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$.

2. Ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$.

3. Ряд Лорана содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$.

**Первый случай.** Ряд Лорана вовсе не содержит отрицательных степеней. В этом случае его можно записать в виде $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Это обычный ряд Тейлора, и в нём можно перейти к пределу при $z \to z_0$, в результате получится, что предельное значение будет равно $c_0$. Если $f(z_0) \neq c_0$, то можно доопределить функцию в точке $z_0$ как $c_0$. Несложно видеть, что это – устранимая точка разрыва первого рода. Назовём её *устранимой особой точкой*.

**Теорема.** Если точка $z_0$ является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, то существует предельное значение $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, причём $|c_0| < \infty$. И, наоборот, если функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$, ограничена $\left(|f(z)| < M\right.$ при $\left.0 < |z - z_0| < R\right)$, то точка $z_0$ есть устранимая особая точка функции $f(z)$.

**Второй случай.** Ряд Лорана содержит только конечное число $m$ членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, то есть $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Такая особенность называется *полюсом порядка* $m$ *для функции* $f(z)$.

**Теорема.** Если точка $z_0$ является полюсом аналитической функции $f(z)$, то при $z \to z_0$ модуль функции неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки $z$ к $z_0$.

*Доказательство.* Представим функцию $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ в виде:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Вынесем за скобки общий множитель $\dfrac{1}{\left(z-z_0\right)^m}$, в результате получим

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\left(z-z_0\right)^m}\left\{c_{-m}+c_{-m+1}\left(z-z_0\right)+\ldots+c_0\left(z-z_0\right)^m+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^{n+m}\right\}.$$

.

Выражение в фигурных скобках объявим новой аналитической функцией

$$\varphi\left(z\right)=c_{-m}+c_{-m+1}\left(z-z_0\right)+\ldots+c_0\left(z-z_0\right)^m+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^{n+m}.$$

Несложно видеть, что функция $\varphi\left(z\right)$ ограничена в некоторой окрестности точки $z_0$.

Из представления функции $f\left(z\right)=\dfrac{\varphi\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^m}$ следует, что при $z\to z_0$ её модуль неограниченно возрастает.

Справедлива также и обратная теорема.

**Теорема.** Если функция $f\left(z\right)$ аналитическая в окрестности своей особой точки $z_0$, неограниченно возрастает по модулю независимо от способа стремления точки $z$ к точке $z_0$, то точка $z_0$ является полюсом функции $f\left(z\right)$.

*Доказательство.* По условию теоремы, для всякого числа $A>0$ можно указать такую $\varepsilon$-окрестность точки $z_0$, что $\left|f\left(z\right)\right|>A$. Рассмотрим функцию $g\left(z\right)=\dfrac{1}{f\left(z\right)}$. В указанной $\varepsilon$-окрестности точки $z_0$ эта функция является аналитической и $\lim\limits_{z\to z_0}g\left(z\right)=0$. Следовательно, $g\left(z\right)=\varphi\left(z\right)\left(z-z_0\right)^m$, причём $\varphi\left(z\right)$ – аналитическая функция, такая, что $\varphi\left(z_0\right)\neq 0$. Тогда $f\left(z\right)=\dfrac{1}{g\left(z\right)}=\dfrac{1}{\left(z-z_0\right)^m}\cdot\dfrac{1}{\varphi\left(z\right)}$.

Отсюда следует, что $f\left(z\right)$ имеет в точке $z_0$ полюс порядка $m$.

**Третий случай.** В этом случае ряд Лорана содержит бесконечно много членов. Назовём такую точку *существенно особой*.

**Теорема (Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса).** Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в любой окрестности существенно особой точки $z_0$ функции $f\left(z\right)$ найдётся хотя бы одна точка $z_1$, в которой значение функции $f\left(z\right)$

отличается от произвольно заданного комплексного числа $B$ меньше, чем на $\varepsilon$.

*Доказательство.* Пусть теорема неверна, то есть при заданном комплексном числе $B$ и заданном $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех $z$ из $\delta$-окрестности точки $z_0$ значение функции $f(z)$ отличается от заданного $B$ больше, чем на $\varepsilon$: $|f(z) - B| > \varepsilon$, $|z - z_0| < \delta$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\omega(z) = \dfrac{1}{f(z) - B}$. В силу $|f(z) - B| > \varepsilon$ функция $\omega(z)$ определена и ограничена всюду в окрестности $|z - z_0| < \delta$. Следовательно, точка $z_0$ – устранимая особая точка для функции $\omega(z)$, то есть $\omega(z) = \varphi(z)(z - z_0)^m$, причём $\varphi(z_0) \neq 0$.

Тогда, т.к. $\omega(z) = \dfrac{1}{f(z) - B}$, то $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}(z - z_0)^{-m} + B$, причём $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ – ограниченная функция. Но в результате получаем, что точка $z_0$ – полюс или устранимая особая точка, что противоречит условию.

**1. Вопросы для самоконтроля:**

1. Какая точка называется правильной?
2. Какая точка называется особой?
3. Как расположены особые точки на границе круга сходимости ряда?
4. Какой ряд называется рядом Лорана? Какова область сходимости ряда Лорана?
5. Как определить порядок нуля?
6. Как классифицируются особые точки функции?
7. Определите регулярную, существенно особую точки функции, полюс и устранимую особую точку.

**Пример**. Разложите функцию $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана в заданной точке $z = 1$.

*Решение.* Сначала разложим функцию на элементарные дроби, используя метод неопределённых коэффициентов: $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z-2}$. Откуда, сложив дроби, получаем:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)}{(z-1)(z-2)} + \frac{B(z-1)}{(z-1)(z-2)}.$$

Так как дроби равны, и равны их знаменатели, то равны и числители, получаем соотношение: $z = A(z-2) + B(z-1)$. Взяв $z = 1$, получим, что $A = -1$, а $B = 2$.

Итак, $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{2}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$.

Теперь заметим, что нам предстоит разложить функцию в ряд в точке $z=1$. Поэтому удобно заменить $z-1$ на новую переменную $\varsigma$. В результате получаем: $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{2}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{2}{\varsigma-1}-\dfrac{1}{\varsigma}$. Разложим в ряд Лорана первое слагаемое.

$\dfrac{2}{\varsigma-1}=-2\cdot\dfrac{1}{1-\varsigma}$. Это – сумма геометрической прогрессии, если $|\varsigma|<1$.

Следовательно, $\dfrac{2}{\varsigma-1}=-2\cdot\dfrac{1}{1-\varsigma}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varsigma^n$.

Объединяя всё вместе, получаем:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{\varsigma}-2\sum_{n=0}^{\infty}\varsigma^n=-\frac{1}{z-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-z)^n}.$$

**2. Разложите функцию в ряд Лорана в заданной точке:**

| | | |
|---|---|---|
| 133. $\dfrac{1}{z-2}$ в точках $z=0$ и $z=\infty$; | 134. $\dfrac{1}{(z-a)^k}$, $a\neq 0$, $k$ – натуральное число, в точках $z=0$ и $z=\infty$; | 135. $\dfrac{1}{z(1-z)}$ в точках $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$; |
| 136. $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки $z=2$ и в кольце $1<\lvert z\rvert<2$; | 137. $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, $0<\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$ в точках $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ и в кольце $\lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\lvert b\rvert$; | 138. $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ в окрестности точки $z=i$ и $z=\infty$; |
| 139. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $\lvert a\rvert\le\lvert b\rvert$ в окрестности $z=\infty$ (рассмотреть обе ветви корня); | 140. $z^2e^{1/z}$ в точках $z=0$ и $z=\infty$; | 141. $e^{\frac{1}{1-z}}$ в точках $z=1$, $z=\infty$; |
| 142. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в окрестности $z=2$; | 143. $z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$ в точке $z=1$; | 144. $e^{\frac{1}{z}+z}$ в области $0<\lvert z\rvert<\infty$ |

## *Теория вычетов и её приложения*

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая всюду в области $D$, кроме точки $z = z_0$, то есть точка $z = z_0$ особая. Несложно видеть, что точка $z = z_0$ – изолированная особая точка, если она лежит внутри области $D$.

Согласно ранее доказанных теорем, в точке $z = z_0$ функция $f(z)$ может быть разложена единственным образом в ряд Лорана: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где коэффициенты ряда $c_n$ могут быть вычислены по формулам: $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}$. В частности, коэффициент с индексом –1 может быть вычислен так: $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(\varsigma) d\varsigma$. Эту величину мы объявим вычетом аналитической функции в изолированной особой точке.

**Определение.** *Вычетом аналитической функции* $f(z)$ *в изолированной особой точке* $z = z_0$ называется комплексное число, равное значению интеграла $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma f(\varsigma) d\varsigma$, взятому в положительном направлении по любому лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутому контуру $\gamma$, содержащему единственную особую точку $z = z_0$ функции $f(z)$. Вычет будем обозначать как $\operatorname{res}\left[ f(z), z = z_0 \right]$.

Несложно видеть, что в правильной или устранимой точке вычет равен нулю. Вычет можно вычислить с помощью формулы:

$$\operatorname{res}\left[ f(z), z = z_0 \right] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma f(\varsigma) d\varsigma .$$

Заметим, что такой способ вычисления зачастую слишком сложен, в некоторых частных случаях всё можно сделать проще.

1. Пусть в точке $z = z_0$ полюс первого порядка. Это означает, что в окрестности точки $z = z_0$ функцию можно разложить в ряд, начинающийся с 1-го члена:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots .$$

Умножим полученный ряд на $(z - z_0)$, в результате получим сходящийся ряд для некоторой функции $\varphi(z)$:

$$f(z)(z-z_0)=c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^{n+1}+\ldots=\varphi(z).$$

Отсюда получаем соотношение: $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$, где в числителе стоит аналитическая в точке $z=z_0$ функция $\varphi(z)$, такая, что $\varphi(z_0)\neq 0$, так как $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=c_{-1}\neq 0$ по определению функции $f(z)$. Следовательно, если функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$, то её вычет $\operatorname{res}\left[f(z),z_0\right]=\varphi(z_0)$.

Эту же формулу несложно обобщить на представление $f(z)$ как частного двух функций: $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $z_0$ – нуль первого порядка для функции $\psi(z)$, а $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=c_{-1}\neq 0$. Тогда формула вычисления вычета примет вид:

$$\operatorname{res}\left[f(z),z_0\right]=\operatorname{res}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},z=z_0\right]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

**Пример.** Рассмотрим функцию $\dfrac{z}{\cos(z)}$. Несложно видеть, что особенности у функции в точке $z=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, причём особенности – первого порядка в изолированных точках. То есть точки $z=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ – полюсы 1-го порядка для функции $\dfrac{z}{\cos(z)}$. Вычислим вычет в любой из них, скажем, в точке $z=\dfrac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{res}\left[\frac{z}{\cos(z)};z=\frac{\pi}{2}\right]=\left.\frac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\pi}{2}.$$

2. Пусть функция $f(z)$ имеет в точке $z=z_0$ полюс порядка $m$, то есть её можно представить в этой точке как

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots$$

Умножив обе части на $(z-z_0)^m$, получим

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + c_1(z-z_0)^{m+1} +$$
$$+c_2(z-z_0)^{m+2} + \ldots + c_n(z-z_0)^{m+n} + \ldots$$

Если продифференцировать обе части равенства по $z$ $m$ раз, то получим соотношение:

$$\left(f(z)(z-z_0)^m\right)^{(m-1)} = (m-1)!c_{-1} + \ldots + c_n(z-z_0)^{n+1} A_{n+m}^{m-1} + \ldots.$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$ в обеих частях равенства, получаем:

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^m\right)^{(m)} = m!c_{-1}.$$

Таким образом, нами получена формула для вычета в полюсе $m$-го порядка:

$$\operatorname{res}\left[f(z), z=z_0\right] = \frac{1}{m!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z_0)\cdot(z-z_0)^m\right)^{(m-1)}.$$

**Пример**. Вычислим вычет для функции $f(z) = \dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^3}$.

*Решение.* Несложно видеть, что функция имеет полюса 3-го порядка в точках $z=i$ и $z=-i$. Действительно, $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2-i^2\right)^3} = \dfrac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$.

Вычислим теперь вычет в полюсе $z=i$. Согласно формуле,

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}, z=i\right] = \frac{1}{3!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\cdot(z-i)^3\right)^{(3-1)} =$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to i}\left((z+i)^{-3}\right)'' = \frac{1}{6}\lim_{z\to i}\left(12(z+i)^{-5}\right) = \frac{1}{6}\left(12(i+i)^{-5}\right) = 2(2i)^{-5} = \frac{2}{32i} = -\frac{i}{16}.$$

**Теорема (основная теорема вычетов).** Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в области $\bar{D}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k$, $k=\overline{1,N}$, лежащих внутри области $D$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(\varsigma)d\varsigma = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname{res}\left[f(z), z_k\right],$$

где $\Gamma$ представляется собой полную границу области $D$, проходимую в положительном направлении.

*Доказательство.* Так как функция $f(z)$ аналитична везде, кроме точек $z_k$, то во всех других точках области она является правильной (то есть все остальные точки являются правильными точками этой функции). Выделим каждую из особых точек $z_k$ функции $f(z)$ замкнутым контуром $\gamma_k$ так, чтобы он содержал только точку $z_k$, не пересекался бы с другими контурами $\gamma_k$ и целиком лежал бы в области $D$.

В замкнутой многосвязной области, ограниченной, с одной стороны, контурами $\gamma_k$, а с другой – границей $\Gamma$, функция $f(z)$ аналитическая. Следовательно, к полной границе многосвязной области можно применить формулу Коши: $\oint\limits_{\Gamma+\sum\limits_{k=1}^{N}\gamma_k^-} f(\varsigma)d\varsigma = 0$. Отметим, что контуры $\gamma_k$ в силу формы границы обходятся в «отрицательном» направлении, то есть по часовой стрелке.

Распишем интеграл в полученной формуле.

По свойствам криволинейного интеграла получаем:

$$\oint\limits_{\Gamma+\sum\limits_{k=1}^{N}\gamma_k^-} f(\varsigma)d\varsigma = \oint\limits_{\Gamma} f(\varsigma)d\varsigma + \sum_{k=1}^{N}\oint\limits_{\gamma_k^-} f(\varsigma)d\varsigma = 0.$$

Перенося интегралы по контурам $\gamma_k$ налево и меняя направление обхода (при этом у интеграла поменяется знак), получаем формулу:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(\varsigma)d\varsigma = \sum_{k=1}^{N}\oint\limits_{\gamma_k^+} f(\varsigma)d\varsigma.$$

Согласно определению вычета, $\operatorname{res}\left[f(z), z = z_k\right] = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_k^+} f(\varsigma)d\varsigma$.

Подставляя в формулу для интеграла по границе $\Gamma$, получим: $\oint\limits_{\Gamma} f(\varsigma)d\varsigma = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}\operatorname{res}\left[f(z), z = z_k\right]$.

**Определение.** *Вычетом аналитической функции* $f(z)$ *в бесконечно удалённой точке* $z=\infty$ называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} f(\varsigma)d\varsigma = -\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^+} f(\varsigma)d\varsigma$, где $C$ – произвольный замкнутый контур, вне которого функция $f(z)$ является аналитической и не имеет особых точек, отличных от $\infty$.

В силу определения коэффициентов ряда Лорана имеет место формула:

$$\operatorname{res}\left[f(z), \infty\right] = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^+} f(\varsigma)d\varsigma = -c_{-1}.$$

Из теоремы о вычетах следует их свойство: сумма всех вычетов во всех изолированных особых точках функции, включая бесконечно удалённую, равна нулю.

**Теорема (о сумме вычетов).** Пусть функция $f(z)$ является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k$, $k=\overline{1,N}$, включая и $z=\infty$ (считаем, что $z_N=\infty$). Тогда

$$\sum_{k=1}^{N}\operatorname{res}\left[f(z),z=z_k\right]=0.$$

*Доказательство.* Рассмотрим замкнутый контур $C$, который содержал бы все $N-1$ изолированную точки $z_k$, что расположены на конечном расстоянии от начала координат. Тогда по основной теореме теории вычетов,

$$\oint_C f(\varsigma)d\varsigma=2\pi i\sum_{k=1}^{N-1}\operatorname{res}\left[f(z),z=z_k\right].$$

Однако в силу формулы $\operatorname{res}\left[f(z),\infty\right]=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} f(\varsigma)d\varsigma=-c_{-1}$, интеграл $\oint_C f(\varsigma)d\varsigma$ равен вычету функции $f(z)$ в точке $z=\infty$, взятому с обратным знаком. Складывая, получаем, что сумма вычетов равна нулю.

**Следствие 1.** Пусть функция $f(z)$ имеет особенности в области $D$ в $m$ изолированных особых точках $z_k$, находящихся на конечном расстоянии от начала координат, и особую точку на бесконечности. Тогда основная теорема теории вычетов может быть переписана в виде:

$$\oint_C f(\varsigma)d\varsigma=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}\left[f(z),z=z_k\right]-2\pi i\operatorname{res}\left[f(z),z=\infty\right].$$

**Следствие 2. (Обобщение формулы Коши на неограниченную область).**

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую вне замкнутого контура $\Gamma$, являющегося границей ограниченной области $D$. Пусть все точки $\Gamma$ – правильные точки функции $f(z)$, а точка $z=\infty$ – устранимая особая точка.

Пусть $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=f(\infty)$. Построим вне $\Gamma$ функцию $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$, где $z_0$ – произвольная точка комплексной плоскости. Несложно заметить, что точка $z=\infty$ – устранимая особая точка и для функции $\varphi(z)$, причём вычет в этой точке: $\operatorname{res}\left[(z), z=\infty\right]=-f(\infty)$.

Если точка $z_0$ лежит внутри $\Gamma$, то функция $\varphi(z)$ других особых точек не имеет. Если точка $z_0$ лежит вне $\Gamma$, то $z_0$ является полюсом не выше первого порядка функции $\varphi(z)$, причём $\operatorname{res}\left[\varphi(z), z=z_0\right]=-f(z_0)$.

Рассмотрим интеграл $\oint\limits_{\Gamma} f(\varsigma)d\varsigma=\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z_0}d\varsigma$, в котором контур $\Gamma$ обходился таким образом, что область $D$ остаётся слева. В силу формулы $\oint\limits_{C} f(\varsigma)d\varsigma=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{m}\operatorname{res}\left[f(z), z=z_k\right]-2\pi i\operatorname{res}\left[f(z), z=\infty\right]$ получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z_0}d\varsigma=\begin{cases} f(\infty),\ z_0-\textit{внутри}\ \Gamma \\ f(\infty)-f(z_0),\ z_0-\textit{вне}\ \Gamma \end{cases}$$

Это и есть обобщение интегральной формулы Коши на случай неограниченной области.

**1. Вопросы для самоконтроля**:

1. Какая точка называется правильной?
2. Какая точка называется особой?
3. Как расположены особые точки на границе круга сходимости ряда?
4. Какой ряд называется рядом Лорана? Какова область сходимости ряда Лорана?
5. Как определить порядок нуля?
6. Как классифицируются особые точки функции?
7. Определите регулярную, существенно особую точки функции, полюс и устранимую особую точку.
8. Какие ряды Тейлора для основных элементарных функций Вы знаете?
9. Как вычислить вычет в полюсе первого порядка? Как вычислить вычет в полюсе порядка $n$?

**Пример**. $f(z)=ze^{1/z}$

*Решение.* Несложно видеть, что невозможно вычислить данную функцию в точке $z=0$. Так же стоит посмотреть поведение этой функции на бесконечности, $z=\infty$.

Итак, точка $z=0$. Формально при $z\neq 0$ можно разложить функцию $e^{1/z}$ в ряд так: $e^{1/z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$, следовательно, вся функции примет вид: $f(z)=ze^{1/z}=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=z+\frac{1}{1!}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-1}}$. Несложно видеть, что в этом ряду у функции бесконечно много членов ряда Лорана, степень которых отрицательна. Следовательно, точка $z=0$ является существенно особой точкой заданной функции $f(z)=ze^{1/z}$.

Теперь рассмотрим поведение функции в точке $z=\infty$. Разложим экспоненту в ряд в точке, отличной от нуля и бесконечно удалённых точек. В результате получим ряд в виде:

$$f(z)=ze^{1/z}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=z+\frac{1}{1!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-1}}.$$

Так как нас интересует бесконечно удалённая точка, то целесообразно сделать замену переменной $\varsigma=\frac{1}{z}$. Следовательно, получим

$$z+\frac{1}{1!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-1}}=\frac{1}{\varsigma}+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varsigma^{n-1}}{n!}.$$

**2. Укажите особые точки функции на комплексной плоскости, классифицируйте их:**

| | | |
|---|---|---|
| 145. $\frac{1}{z-z^3}$; | 146. $\frac{z^4}{1+z^4}$; | 147. $\frac{z^6}{(1-z)^3}$; |
| 148. $\frac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}$; | 149. $\frac{e^z}{1+z^2}$; | 150. $\frac{z^2+1}{e^z}$; |
| 151. $ze^{-z}$; | 152. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$; | 153. $\frac{e^z}{z\left(1-e^{-z}\right)}$; |
| 154. $\frac{1}{\sin z}$; | 155. $\frac{\cos z}{z^2}$; | 156. $\sin\frac{1}{1-z}$; |
| 157. $tg^2 z$; | 158. $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$; | 159. $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$. |

**Пример.** Вычислите вычеты в особых точках функции $f(z)=\frac{1}{z^2-z^3}$.

*Решение.* Сначала найдём и классифицируем особые точки функции. Это точки, в которых знаменатель функции обращается в нуль, то есть $z^2-z^3=0$, или точки $z=0$ и $z=1$.

Так как $f(z)=\frac{1}{z^2-z^3}=\frac{1}{z^2(1-z)}$, то несложно видеть, что точка $z=0$ является полюсом второго порядка, а точка $z=1$ – полюсом первого порядка.

Находим вычет в точке $z=0$:

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2(1-z)}, z=0\right]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2(1-z)}\cdot z^2\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(1-z)}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)=1.$$

Теперь найдём вычет в точке $z=1$:

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2(1-z)}, z=1\right]=\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{z^2(1-z)}\cdot(z-1)\right)=\lim_{z\to 1}\left(-\frac{1}{z^2}\right)=-1.$$

**3. Найти вычет указанной функции относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки (если только она не является предельной точкой для особых точек):**

| | | |
|---|---|---|
| 160. $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; | 161. $\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$; | 162. $\dfrac{1}{z\left(1-z^2\right)}$; |
| 163. $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; | 164. $\dfrac{1}{\sin z}$; | 165. $ctg^2 z$. |

## *Вычисление интегралов с помощью вычетов*

Вычеты можно применять для вычисления различных интегралов.

**1. Интегралы от тригонометрических функций вида** $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\,d\vartheta$**.**

Пусть подынтегральная функция в интеграле $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\,d\vartheta$ – рациональная функция своих аргументов.

Выполним замену: $z=e^{i\vartheta}$, откуда $i\vartheta=\ln z$, или $\vartheta=\frac{1}{i}\ln z$, и далее $\vartheta=-i\ln z$. Соответственно, дифференциал $d\vartheta=d(-i\ln z)=-id\ln z=$ $=-i(\ln z)'\,dz=-\frac{i}{z}dz.$

Что касается косинуса и синуса, то они могут быть выражены через $z$ в соответствии с формулами Эйлера:

$$\cos\vartheta=\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2} \text{ и } \sin\vartheta=\frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}.$$

Так как $z=e^{i\vartheta}$, то $\frac{1}{z}=e^{-i\vartheta}$, и получаем:

$$\cos\vartheta=\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},\ \sin\vartheta=\frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}.$$

Кроме этого, отметим, что переменная $z=e^{i\vartheta}$ при $\vartheta\in[0;2\pi]$ задаёт окружность с началом в центре координат радиуса 1. Следовательно, простой интеграл можно заменить интегралом с обходом по контуру окружности с центром в начале координат радиуса 1, т.е. $C:|z|=1$.

В результате получаем:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\,d\vartheta=-i\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{z}.$$

Рациональная функция $R$ представляет собой дробь. Следовательно, $R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)=\frac{a_0+...+a_nz^n}{b_0+...+b_mz^m}$. Знаменатель этой дроби имеет конечное число корней разной степени кратности, часть из которых будет лежать внутри контура $C:|z|=1$, и к нему можно применить основную теорему вычетов:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\,d\vartheta=-i\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{z}=$$

$$=2\pi\sum_{j=1}^{k}\operatorname{res}\left[R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{z};z_k\right].$$

Теперь осталось только посчитать вычеты.

**Пример.** Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1+a\cos\vartheta}$, где $|a|<1$.

*Решение.* Выполним замену: $z=e^{i\vartheta}$, откуда $\vartheta=-i\ln z$ и $d\vartheta=-\frac{i}{z}dz$.

Далее, $\cos\vartheta=\frac{z^2+1}{2z}$. Подставив всё в интеграл, получим:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1+a\cos\vartheta}=-i\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+a\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{z}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a}.$$

Выясним, какие точки являются особыми точками подынтегральной функции. Видимо, это нули знаменателя: $az^2+2z+a=0$, то есть точки $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$. Несложно видеть, что из двух корней только один лежит внутри контура, и это корень со знаком «+»: $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$.

Следовательно, в силу основной теоремы теории вычетов, получаем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1+a\cos\vartheta} = -i \oint_{|z|=1} \frac{1}{1+a\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{z} = 4\pi \operatorname{res}\left[\frac{dz}{az^2+2z+a}; \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right].$$

Полюс первого порядка, поэтому

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{az^2+2z+a}; \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right] = \left.\frac{1}{2az+2}\right|_{z=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}} = \frac{1}{2a\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)+2} =$$

$$= \frac{1}{-2+2\sqrt{1-a^2}+2} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}.$$

Следовательно, интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1+a\cos\vartheta} = 4\pi \operatorname{res}\left[\frac{dz}{az^2+2z+a}; \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

**2. Интегралы по всей числовой прямой вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.** Чтобы можно было вычислять подобные интегралы, необходимы некоторые дополнительные построения: достроим прямую до полуокружности, которая охватывала бы верхнюю полуплоскость комплексной плоскости в соответствии с теоремой:

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют такие положительные числа $R_0$, $z$ и $\delta$, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R_0$ справедлива оценка: $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R'} f(z)dz = 0$, где контур интегрирования $C_R'$ представляет собой полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$ в верхней полуплоскости $z$ (рис. 26).

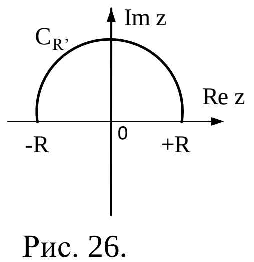



Рис. 26. Полуокружность $C_R'$ в верхней полуплоскости

*Доказательство.* В силу свойств интеграла по комплексной переменной: $\left|\int\limits_{C'_R} f(z)dz\right| \le \int\limits_{C'_R} |f(z)|ds$. По условиям теоремы $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$ на полуокружности, следовательно, $\int\limits_{C'_R} |f(z)|ds \le \int\limits_{C'_R} \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}ds$.

Так как $|z|$ всюду на контуре равен радиусу полуокружности, то

$$\int\limits_{C'_R} \frac{M}{|z|^{1+\delta}}ds = \frac{M}{R^{1+\delta}}\int\limits_{C'_R} ds = \frac{M}{R^{1+\delta}} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi M}{R^{\delta}}.$$

Окончательно получаем: $\left|\int\limits_{C'_R} f(z)dz\right| \le \dfrac{2\pi M}{R^{\delta}}$.

В пределе $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{2\pi M}{R^{\delta}} = 0$, откуда и $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} f(z)dz = 0$.

**Следствие.** Если условия теоремы верны для какого-либо сектора полуокружности, то формула верна и для сектора.

Сформулируем общую теорему, позволяющую заменить интегрирование по прямой интегрированием по бесконечно большой полуокружности в верхней полуплоскости:

**Теорема.** Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty < x < \infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \ge 0$, причём её аналитическое продолжение, функция $f(z)$ удовлетворяет условиям предшествующей теоремы и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует и равен $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right]$, где $z_k$ – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости (рис. 27).

*Доказательство.* По условию теоремы функция $f(z)$ в верхней полуплоскости имеет конечное число особых точек $z_k$, причём все они удовлетворяют условию $|z_k| < R_0$. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из отрезка $-R < x < R$ и верхней полуокружности $C'_R$. В силу основной теоремы вычетов верно следующее:

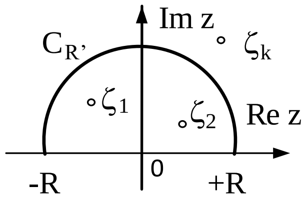



Рис. 27. Полуокружность $C'_R$ в верхней полуплоскости и особые точки $z_k$

$$\int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}\left[f(z), z_k\right].$$

Согласно предыдущей теореме, интеграл $\oint_{C'_R} f(z)dz$ будет стремиться к нулю, следовательно, в пределе при $R \to \infty$ получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}\left[f(z), z_k\right].$$

**Пример.** Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

*Решение.* Несложно видеть, что подынтегральное выражение удовлетворяет всем условиям теоремы, достаточно быстро убывает на бесконечности. Следовательно,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \oint_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}\left[f(z), z_k\right].$$

Для нахождения вычета нужно выяснить особые точки подынтегрального выражения, то есть нули знаменателя дроби. $1+z^2=0$, то есть $z=\pm i$. Внутри контура находится только точка $z=i$, следовательно, вычет будет только в этой точке. Отметим, что в точке $z=i$ у функции полюс первого порядка.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i\,\mathrm{res}\left[\frac{1}{1+z^2}, z=i\right] = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi .$$

**3. Интегралы по всей числовой прямой вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$. Лемма Жордана.**

Чтобы можно было вычислять эти интегралы, докажем сначала вспомогательную теорему – лемму Жордана.

**Теорема (лемма Жордана).** Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} e^{ia\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma = 0,$$

где $C'_R$ – дуга полуокружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости.

*Доказательство.* Условие равномерного стремления $f(z)$ к нулю означает, что при $|z|=R$ имеет место оценка $|f(z)|<\mu_R$, $|z|=R$, где $\mu_R \to 0$ при $R \to \infty$.

С помощью этих соотношений оценим интеграл $\int\limits_{C_R'} e^{ia\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma$.

Заменим переменную $\varsigma = Re^{ix}$ и отметим, что $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

В результате получаем серию оценок:

$$\left|\int\limits_{C_R'} e^{ia\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma\right| \leq \mu_R R \int\limits_0^{\pi} \left|e^{ia\varsigma}\right| dx = \mu_R R \int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin x} dx =$$

$$= 2\mu_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin x} dx < 2\mu_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2aRx/\pi} dx =$$

$$= \frac{\pi}{a}\mu_R\left(1-e^{-aR}\right).$$

Несложно видеть, что полученное выражение стремится к нулю, если $R \to \infty$, что и доказывает лемму.

**Следствие 1**. Если $a<0$, а функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости, то формула леммы Жордана справедлива для интегрирования по дуге полуокружности в нижней полуплоскости.

**Следствие 2.** Лемма Жордана остаётся справедливой и в том случае, когда $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq y_0$, только интегрирование необходимо производить по дуге окружности $|z-iy_0|=R$.

**Теорема.** Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty<x<\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$, причём её аналитическое продолжение, функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$, $a>0$, существует и равен

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z)e^{iaz}, z_k\right],$$

где $z_k$ – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости $z$.

*Доказательство.* По условию теоремы особые точки $z_k$ функции $f(z)$ в верхней полуплоскости удовлетворяют условию $|z_k| < R$. Рассмотрим в верхней полуплоскости $z$ замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R \le x \le R$, $R > R_0$ и дуги $C'_R$ полуокружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости $z$.

По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^{+R} f(x)e^{iax}dx + \int_{C'_R} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}\left[f(z)e^{iaz}, z_k\right].$$

По лемме Жордана предел второго слагаемого $\int\limits_{C'_R} f(z)e^{iaz}dz$ при $R \to \infty$ равен нулю. Следовательно, теорема верна.

**Пример.** Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos(ax)dx}{1+x^2}$.

*Решение.* Чтобы получить подынтегральное выражение, которое удовлетворяет всем условиям леммы Жордана, проведём преобразование:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)dx}{1+x^2} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}dx}{1+x^2}.$$

Полученная функция достаточно быстро убывает на бесконечности. Следовательно, $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos(ax)dx}{1+x^2} = \oint\limits_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}\mathrm{res}\left[f(z), z_k\right]$.

Для нахождения вычета нужно выяснить особые точки подынтегрального выражения, то есть нули знаменателя дроби. $1+z^2=0$, то есть $z = \pm i$. Внутри контура находится только точка $z = i$, следовательно, вычет будет только в этой точке. Отметим, что в точке $z = i$ у функции полюс первого порядка.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)dx}{1+x^2} = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\,\mathrm{res}\left[\frac{e^{iax}}{1+z^2}, z=i\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\left.\frac{e^{iax}}{2z}\right|_{z=i}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{2\pi i}{2i}e^{i^2a}\right\} = \pi e^{-1}.$$

### *Логарифмический вычет*

Пусть в области $D$ задана однозначная функция $f(z)$, аналитическая всюду в $D$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k$, $k = \overline{1, p}$, причём все точки $z_k$ являются полюсами. Предположим, что на границе области $D$ нет ни нулей, ни особых точек функции $f(z)$, и рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$. Несложно видеть, что эта функция является логарифмической производной: $\varphi(z)=\frac{d}{dz}\ln\left(f(z)\right)$ для функции $f(z)$.

**Определение.** Вычеты функции $\varphi(z)=\frac{d}{dz}\ln\left(f(z)\right)$ в её особых точках $z_m$, $m=\overline{1,M}$ называются *логарифмическими вычетами функции* $f(z)$.

Несложно видеть, что особыми точками для функции $\varphi(z)$ будут как нули $z_n, n=\overline{1,N_n}$, так и полюса этой функции $z_p$, $p=\overline{1,N_p}$. Найдём значение вычета в каждой из особых точек $\varphi(z)$.

Пусть, к примеру, точка $z=z_k$ является нулём порядка $n_k$ функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид: $f(z)=(z-z_k)^{n_k}\ f_1(z)$, причём $f_1(z_k)\neq 0$ и $z=z_k$ является правильной точкой функции $f_1(z_k)$.

Вычислим логарифмическую производную:

$$\varphi(z)=\frac{d}{dz}\ln\left((z-z_k)^{n_k}\ f_1(z)\right)=n_k\left(\ln(z-z_k)\right)'+\left(\ln f_1(z)\right)'=\frac{n_k}{z-z_k}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Несложно видеть, что второе слагаемое не имеет особенностей в точке $z=z_k$, и не даст какого-либо вклада в вычет. Следовательно, $\operatorname{res}\left[\varphi(z),z=z_k\right]=n_k$.

Пусть, к примеру, точка $z=z_k$ является полюсом порядка $p_k$ функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид: $f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-z_k)^{p_k}}$, причём $f_1(z_k)\neq 0$ и $z=z_k$ является правильной точкой функции $f_1(z_k)$.

Вычислим логарифмическую производную:

$$\varphi(z)=\frac{d}{dz}\ln\left(\frac{f_1(z)}{(z-z_k)^{p_k}}\right)=-p_k\left(\ln(z-z_k)\right)'+\left(\ln f_1(z)\right)'=-\frac{p_k}{z-z_k}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Второе слагаемое не имеет особенностей в точке $z=z_k$, и не даст какого-либо вклада в вычет. Следовательно, $\operatorname{res}\left[\varphi(z),z=z_k\right]=-p_k$.

Из двух полученных нами формул можно сделать вывод:

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\bar{D}$, за исключением конечного числа точек лежащих внутри $D$ изолированных особых точек $z = z_k$, которые все являются полюсами, и пусть $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы $\Gamma$ области $D$. Тогда разность между полным числом нулей $N$ и полным числом полюсов $P$ функции $f(z)$ в области $D$ определяется выражением $N - P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

Под полным числом нулей и полюсов понимается число нулей $N = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k$, посчитанных с учётом их кратности, и число полюсов, также посчитанное с учётом их кратности: $P = \sum\limits_{k=1}^{p} p_k$.

*Доказательство.* Найдём интеграл по замкнутой границе области $D$, то есть по кривой $\Gamma$ от функции $\varphi(z) = \frac{d}{dz}\ln(f(z))$: $\oint\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

Несложно видеть, что вычислить этот интеграл можно с помощью основной теоремы теории вычетов: $\oint\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\sum\limits_{j=1}^{k}\mathrm{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z = z_k\right]$.

Вычеты, как мы рассмотрели ранее, берутся в точках, которые являются либо полюсами, либо нулями функции $f(z)$; также нам известны их значения.

В результате получаем:

$$\oint\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\mathrm{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z = z_k\right] = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n} n_k - \sum_{k=1}^{p} p_k\right) = 2\pi i(N - P).$$

Следствием теоремы о логарифмическом вычете является теорема Руше и основная теорема высшей алгебры.

**Теорема (теорема Руше).** Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в замкнутой области $\bar{D}$, причём на границе $\Gamma$ справедливо неравенство $|f(z)|_{\Gamma} > |g(z)|_{\Gamma}$. Тогда полное число нулей в области $D$ функции $F(z) = f(z) + g(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$.

Доказательство можно найти в [6].

**Основная теорема высшей алгебры.** Полином $n$-ой степени имеет на комплексной плоскости ровно $n$ нулей (с учётом их кратности).

## 5. Конформное отображение

### *Основные понятия*

**Определение**. Взаимно-однозначное отображение области $D$ комплексной плоскости $z$ на область $G$ комплексной плоскости $w$ называется *конформным*, если это отображение во всех точках $z \in D$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Несложно видеть, что такими свойствами обладает аналитическая в области $D$ функция.

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ является однозначной и однолистной аналитической функцией в области $D$ и $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда функция $f(z)$ производит конформное отображение области $D$ на область $G$ комплексной плоскости $w$, представляющую собой область значений функции $w = f(z)$ при $z \in D$.

*Доказательство.* Действительно, в силу условия $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$ отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, во всех точках области $D$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений. Это и означает истинность теоремы.

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $D$ комплексной области $z$ на область $G$ комплексной плоскости $w$ и ограничена в $D$. Тогда функция $f(z)$ является однолистной и аналитической в области $D$, причём $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$.

*Доказательство.* Так как отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, является конформным, то оно является взаимно-однозначным, и в любой точке $z_0 \in D$ выполняются свойства сохранения углов и постоянства растяжений. Следовательно, для любых точек $z_1$ и $z_2$, принадлежащих окрестности точки $z_0 \in D$ с точностью до бесконечно малых величин выполняются соотношения:

$$\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = k \neq 0,$$

где $\Delta z_1 = z_1 - z_0$, $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ – бесконечно малые линейные элементы, выходящие из точки $z_0$, а $\Delta w_1$ и $\Delta w_2$ их образы при отображении.

В силу $\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1$ соответствующие углы в точках $z_0$ и $w_0$ равны не только по абсолютной величине, но и по направлению. Обозначив $\arg \dfrac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg \Delta w_2 - \arg \Delta z_2 = \arg \Delta w_1 - \arg \Delta z_1 =$

$=\arg\dfrac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=\alpha.$ Тогда с точностью до бесконечно малых величин имеет место соотношение $\dfrac{\Delta w_2}{\Delta z_2}=\dfrac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=ke^{i\alpha}$.

В силу произвольности выбора точек $z_1$ и $z_2$ в окрестности точки $z_0$ соотношение $\dfrac{\Delta w_2}{\Delta z_2}=\dfrac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=ke^{i\alpha}$ означает, что существует предел разностного отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z\to 0$. Этот предел по определению является производной функции $f(z)$ в точке $z_0$. Так как $k\neq 0$, то эта производная отлична от нуля: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z_0)\neq 0$.

Так как точка $z_0$ – произвольная точка области $D$, поэтому функция $f(z)$ является аналитическая в $D$. Кроме этого, $f'(z)\neq 0$ при $z\in D$. Однолистность функции $f(z)$ следует из взаимной однозначности отображения.

Итак, теорема доказана.

Конформное отображение, таким образом, области $D$ комплексной плоскости $z$ на область $G$ комплексной плоскости $w$ осуществляется только однолистными аналитическими функциями комплексной переменной с производной, отличной от нуля во всех точках области $D$.

## ***Построение конформных отображений***

Для построения конформного отображения существует целый ряд приёмов, однако, среди них нет такого, который позволял всякую область превращать во всякую.

*Линейная функция* $f(z)=az+b$, где $a\neq 0, b$ – произвольные комплексные числа, осуществляет конформное отображение полной комплексной плоскости $z$ на полную комплексную плоскость $w$, так как эта функция однолистна и её производная $f'(z)=a\neq 0$ во всех точках плоскости $z$.

**Пример.** Построить функцию, осуществляющую конформное отображение круга $|z-1-i|\leq 2$ на единичный круг $|w|\leq 1$.

*Решение.* Так как области исходная и отображения подобны, то речь может идти только о сжатиях-растяжениях и поворотах. В качестве такой функции можно взять линейную функцию $f(z)=az+b$.

За растяжение отвечает коэффициент $a$. Так как радиус уменьшается в два раза, то и коэффициент должен быть вдвое меньше, то есть $|a| = \frac{1}{2}$. Аргумент может иметь любое значение; он прибавится к аргументу $z$ и это приведёт к повороту относительно центра координат в плоскости $w$.

Теперь надо выполнить смещение из центра окружности $z_0 = 1 + i$, то есть $w = a(z - z_0)$.

**Пример.** Построить функцию, конформно отображающую полосу $0 < \operatorname{Re} z < a$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

*Решение.* Функция $z_1 = \frac{\pi}{a} z$ отображает исходную полосу на полосу $0 < \operatorname{Re} z_1 < \pi$. Функция $z_2 = iz_1$ переводит полученную полосу в полосу $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$. Наконец, функция $w = e^{z_2}$ осуществляет конформное отображение данной полосы на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Поэтому функция, осуществляющая данное конформное отображение, может быть предложена в виде $w = e^{i\frac{\pi}{a}z}$.

*Дробно-линейная функция.*

**Определение.** *Дробно-линейной функцией* называется функция комплексной переменной, имеющая вид: $w = \frac{a + bz}{c + dz}$, где $a, b, c, d$ – заданные комплексные постоянные, которые должны удовлетворять условию $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (в противном случае функция будет просто равна постоянной).

Несложно видеть, что дробно-линейную функцию можно преобразовать к виду: $w = \frac{a + bz}{c + dz} = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}$, где $\alpha \neq \beta$. Эта функция является однозначной аналитической функцией на полной комплексной плоскости $z$ и имеет единственную особую точку – полюс первого порядка $z = -\beta$.

Обратная функция $z = \frac{\lambda\alpha - \beta w}{w - \lambda}$ так же является дробно-линейной функцией, определённой на полной плоскости $w$. При этом точка $z_0 = -\beta$ переходит в точку $w = \infty$, а точка $z = \infty$ переходит в точку $w = \lambda$.

Проверим, равна ли производная функции нулю:

$$f'(z) = \left( \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z} \right)' = \lambda \frac{\beta - \alpha}{(\beta + z)^2} \neq 0 .$$

Из полученного следует, что функция может осуществлять конформное отображение плоскости $z$ на плоскость $w$.

**Теорема**. Заданием соответствия трем различным точкам плоскости $z$ трёх различных точек плоскости $w$ дробно-линейная функция определена однозначно.

Доказательство осуществляется непосредственным вычислением параметров $\lambda$, $\alpha$, $\beta$ дробно-линейной функции.

**Теорема (круговое свойство)** Дробно-линейная функция переводит окружности на плоскости $z$ в окружности на плоскости $w$.

Доказательство проводится путём непосредственной проверки получающихся формул.

**Пример.** Найти функцию, конформно отображающую единичный круг $|z|<1$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$.

*Решение.* Для решения задачи нам нужно предложить, куда будут отображаться граничные точки областей. Пусть соответствие будет таким: $z_1=1\to w_1=0$, $z_2=i\to w_2=1$, $z_3=-1\to w_3=\infty$.

Так как $w=\lambda\dfrac{z+\alpha}{z+\beta}$, то, воспользовавшись условием $z_1=1\to w_1=0$, получим, что $\alpha=-1$. Теперь воспользуемся условием $z_3=-1\to w_3=\infty$. Знаменатель обратится в нуль – получится бесконечно удалённая точка. Это будет, когда $z=-\beta$, то есть $\beta=1$.

В результате функция получила вид $w=\lambda\dfrac{z-1}{z+1}$.

Коэффициент $\lambda$ несложно найти, подставив вторе условие: $z_2=i\to w_2=1$.

То есть $1=\lambda\dfrac{i-1}{i+1}$, откуда $\lambda=\dfrac{i+1}{i-1}=\dfrac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\dfrac{1+2i-1}{-1-1}=-i$.

Таким образом, окончательно получаем соотношение: $w=-i\dfrac{z-1}{z+1}$.

При более сложных отображениях нескольких окружностей полезна следующая теорема.

**Теорема**. При отображении, осуществляемом дробно-линейной функцией, точки, симметричные относительно любой окружности, переходят в точки, симметричные относительно образа этой окружности.

**Пример**. Найти функцию, конформно отображающую единичный круг $|z|<1$ сам на себя так, чтобы заданная внутренняя точка $z_0$ перешла бы в центр круга.

*Решение.* Воспользуемся дробно-линейной функцией. Точка $z_0$ перейдёт в центр круга, т.е. точку $w=0$, а точка, симметричная точке $z_0$

относительно исходной окружности $|z|=1$ – точка $z_1$, перейдёт в точку, симметричную относительно новой окружности $|w|=1$ её центру. Но это – бесконечно удалённая точка. То есть $w=\lambda\dfrac{z-z_0}{z-z_1}$.

Масштабирования не происходит, следовательно, $|\lambda|=1$, или $\lambda=e^{i\omega}$ для всякого вещественного $\omega$.

## 6. Операционное исчисление

### *Основные понятия операционного исчисления*

**Определение**. *Преобразование* (или *изображение*) Лапласа ставит в соответствие функции $f(t)$ действительной переменной $t$ функцию $F(p)$ комплексной переменной $p$ с помощью соотношения $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$.

Полученная функция называется *преобразованием Лапласа.*

Заметим, что преобразование Лапласа применимо отнюдь не ко всякой функции. Функция $f(t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. При $t<0$ $f(t)\equiv 0$.

2. При $t\ge 0$ функция $f(t)$ на любом конечном участке оси $t$ имеет не более чем конечное число точек разрыва второго рода.

3. При $t\to\infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, то есть для каждой функции рассматриваемого класса существуют такие положительные $M$ и $a$, что для всех $t>0$ $|f(t)|\le Me^{at}$.

**Теорема**. Интеграл $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ сходится в области $\operatorname{Re}p>a$, где $a$ – показатель степени роста функции $f(t)$, причём для любого $x_0>a$ интеграл $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ при $\operatorname{Re}p\ge x_0>a$ сходится равномерно.

*Доказательство.* Для всякого $p=x+iy$ при $x>a$ можно указать такое $\varepsilon>0$, что $x>a_1=a+\varepsilon$, причём $|f(t)|\le Me^{at}$. Воспользуемся теперь признаком сравнения сходимости несобственных интегралов:

$$|F(p)|=\left|\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right|\le M\int\limits_0^\infty e^{-xt}e^{a_1t}dt=\frac{M}{x-a_1},$$

где $x > a_1$. Несложно видеть, что это число существует и конечно.

Так как интеграл равномерно оценивается сверху, то в силу признака Вейерштрасса интеграл равномерно сходится по параметру $p$ в области $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$.

**Замечание**. В приложениях часто используется преобразование Хэвисайда:

$$\tilde{F}(p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

**Теорема**. Преобразование (изображение) Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ функции $f(t)$ является аналитической функцией комплексной переменной $p$ в области $\operatorname{Re} p > a$, где $a$ – показатель степени роста функции $f(t)$.

*Доказательство.* В силу предыдущей теоремы несобственный интеграл сходится в области $\operatorname{Re} p > a$. Разобьём интервал интегрирования на отрезки $[t_i; t_{i+1}]$ произвольной конечной длины, причём $t_0 = 0$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ представляет собой сумму сходящегося ряда: $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$.

Несложно заметить, что остаток ряда здесь $\int_{t_n}^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ – интеграл, зависящий от параметра $p$ по отрезку конечной длины. Согласно свойствам таких интегралов, описанных в [6], все функции $u_n(p)$ являются целыми функциями $p$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$ обладает в области $\operatorname{Re} p > a$ всеми свойствами, необходимыми для применимости теоремы Вейерштрасса. Следовательно, функция $F(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p > a$, и её производные можно вычислять, дифференцируя подынтегральную функцию по параметру.

Вычислим преобразования Лапласа различных функций. Отметим, что нередко преобразование Лапласа той или иной функции называют *изображением функции*.

**Пример**. Единичная функция Хэвисайда.

Пусть $f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$. Тогда $f(t) \risingdotseq F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \dfrac{1}{p}$.

Итак, $\sigma_0(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$.

Вычисляя преобразование Лапласа для различных функций, можно построить их таблицу.

***Таблица преобразований Лапласа***

| | |
|---|---|
| $e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\alpha}, \ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$ | $t^{\nu} \risingdotseq \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \ \nu > 1, \ \operatorname{Re} p > 0$ |
| $\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \ \operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$ | $t^{n} \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}, \ n -$ *натуральное,* $\operatorname{Re} p > 0$ |
| $\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \ \operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$ | $t\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}, \operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$ |
| $t\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}, \ \operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$ | $e^{\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2},$ $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert + \operatorname{Re}\lambda$ |
| $e^{\lambda t}\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2},$ $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert + \operatorname{Re}\lambda$ | $\dfrac{\sin\omega t}{t} \risingdotseq \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{p}{\omega}, \ \operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$ |

Заметим, что многие изображения различных функций можно получить, используя свойства изображений.

***Свойства преобразования Лапласа***

**1. Линейность изображения.**

**Свойство 1.** Если $f_i(t) \risingdotseq F_i(p)$, $\operatorname{Re} p > a_i$, $i = \overline{1,N}$, то тогда

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} f_i(t) \risingdotseq \sum_{j=1}^{N} F_i(p) = F(p), \text{ если } \operatorname{Re} p > \max a_i.$$

Доказательство получается интегрированием конечной суммы и из свойства линейности сходящегося интеграла.

**2. Аргумент, умноженный на число.**

**Свойство 2.** Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда $f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$.

*Доказательство.* $f(\alpha t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\infty f(\alpha t)e^{-\frac{p}{\alpha}(\alpha t)}d(\alpha t)$.

Делаем замену переменной $\alpha t = \tau$.

Получаем:

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\infty f(\alpha t)e^{-\frac{p}{\alpha}(\alpha t)}d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}d\tau = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

**3. Теорема запаздывания.**

**Свойство 3.** Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Пусть задана функция

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}.$$

Тогда $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$.

*Доказательство.* $f_\tau(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f_\tau(t)e^{-pt}dt = \int\limits_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt$. В интеграле сделаем замену $x = t - \tau$. Тогда получим:

$$f_\tau(t) \risingdotseq \int\limits_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(x)e^{-p(x+\tau)}dx = \int\limits_0^\infty f(x)e^{-px}e^{-p\tau}dx =$$

$$= e^{-p\tau}\int\limits_0^\infty f(x)e^{-px}dx = e^{-p\tau}F(p).$$

**4. Изображение производной.**

**Свойство 4.** Если $f'(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения при $\operatorname{Re} p > a$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$, $\operatorname{Re} p > a$.

*Доказательство.* Доказательство можно получить непосредственным интегрированием:

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty e^{-pt}df(t) = f(t)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty f(t)de^{-pt} = -f(0) +$$

$$+ p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0).$$

**Следствие:** Если $f^{(m)}(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения при $\operatorname{Re} p > a$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$f^{(m)}(t) \risingdotseq p^m F(p) - p^{m-1}f(0) - p^{m-2}f'(0) - \ldots - f^{(m-1)}(0).$$

Доказательство представляет собой многократное интегрирование по частям.

**5. Изображение интеграла.**

**Свойство 5.** Пусть $f(t) \fallingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \fallingdotseq \frac{1}{p} F(p),\ \operatorname{Re} p > a.$$

*Доказательство.* Несложно проверить, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям существования изображения, причём показатель степени роста такой же, как у исходной функции $f(t)$. Вычислим изображение функции $\varphi(t)$: $\varphi(t) \fallingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f(\tau)\,d\tau$.

Поменяем в интеграле порядок интегрирования, получим:

$$\varphi(t) \fallingdotseq \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{p} F(p).$$

Аналогично можно доказать случай с многократным интегрированием.

**6. Изображение свёртки**. *Свёрткой функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $\varphi(t)$, определённая соотношением

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_2(\tau)\, f_1(t-\tau)\,d\tau.$$

**Свойство 6.** Если $f_1(t) \fallingdotseq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $f_2(t) \fallingdotseq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$, то тогда $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau \fallingdotseq F_1(p) F_2(p)$, где $\operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\}$.

*Доказательство*. Свёртка функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ с ограниченной степенью роста также будет функцией с ограниченной степенью роста. Действительно,

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau \right| \le M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1 \tau} e^{a_2 (t-\tau)} d\tau = \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2} \left\{ e^{a_1 t} - e^{a_2 t} \right\} \le$$

$\le \dfrac{M_1 M_2}{a_1 - a_2} e^{at}$, где $a = \max\{a_1, a_2\}$.

Для вычисления изображения $\varphi(t) \fallingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau$ изменим порядок интегрирования:

$$\varphi(t) \fallingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f_1(t)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt.$$

Заменяя переменную $x = t - \tau$ во внутреннем интеграле, получаем соотношение: $\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty e^{-px} f_2(x)\,dx$, что и доказывает свойство 6:

$$\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty e^{-px} f_2(x)\,dx = F_1(p)F_2(p).$$

**7. Дифференцирование изображения.**

**Свойство 7.** Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда $-tf(t) \risingdotseq F'(p)$, $\operatorname{Re} p > a$.

*Доказательство.* Функция $F(p)$ – аналитическая. Производную такой функции можно вычислить в области её определения, непосредственно дифференцируя интеграл по параметру (доказательство см. [6]) $F'(p) = \dfrac{d}{dp}\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = -\int\limits_0^\infty f(t)te^{-pt}dt$.

Так как умножение функции $f(t)$ на любую степень $t^n$ не меняет её степени роста, получим утверждение теоремы.

**8. Интегрирование изображения.**

**Свойство 8.** Если функция $\dfrac{f(t)}{t}$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(x)\,dx.$

**9. Теорема смещения.**

**Свойство 9.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то для любого комплексного числа $\lambda$ $e^{-t\lambda} f(t) \risingdotseq F(p+\lambda)$, $\operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda$.

По изображению можно восстановить исходную функцию. Самый простой способ это сделать – найти функцию в таблице и провести необходимое преобразование. При необходимости искомое выражение можно преобразовать к сумме нескольких изображений известных функций.

**Пример.** Восстановите изображение $F(p) = \dfrac{1}{p^2 - 1}$.

*Решение.* Разобьём $F(p) = \dfrac{1}{p^2 - 1}$ на сумму функций, используя правило неопределённых коэффициентов: $F(p) = \dfrac{1}{p^2-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p+1}$.

Так как коэффициент можно выносить за знак преобразования, то можно найти отдельно прообраз функции $\frac{1}{p-1}$: $\frac{1}{p-1} \fallingdotseq e^{t}$ и прообраз $\frac{1}{p+1} \fallingdotseq e^{-t}$.

Учитывая свойства линейности, получаем, что $F(p) = \frac{1}{p^2 - 1} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$.

**Теорема (формула Меллина).** Пусть известно, что заданная функция $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > a$ является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной $t$, обладающей степенью роста $a$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \text{ при условии, что } x > a.$$

Доказательство теоремы можно найти в [6].

Сходная теорема существует и для произведения двух изображений:

**Теорема.** Пусть $f_1(t) \fallingdotseq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $f_2(t) \fallingdotseq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$. Тогда

$$f(t) = f_1(t)\, f_2(t) \fallingdotseq F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q)\, dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q) F_2(q)\, dq,$$

причём функция $F(p)$ определена и аналитична в области $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$, а интегрирование производится по любой прямой, параллельной мнимой оси, удовлетворяющей в первом случае условию $a_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_2$, условию $a_2 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_1$ – во втором.

Доказательство можно также найти в [6].

**Пример**. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\omega^2 > 0$.

*Решение.* Чтобы найти функцию $f(t)$, надо провести преобразование Меллина, тем более, что все условия для допустимости этого преобразовании выполнены: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\omega e^{pt} dp}{\omega^2 + p^2}$, $x > 0$.

Продолжим аналитически функцию в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$. Это аналитическое продолжение удовлетворяет всем условиям леммы

Жордана, и у него есть две особых точки – $p = \pm i\omega$. Следовательно, можно превратить прямую интегрирования в замкнутый контур – полуокружность, диаметр которой расположен вертикально, а сама полуокружность лежит в левой части комплексной полуплоскости и вычислить интеграл с помощью вычетов:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{\omega e^{pt}dp}{\omega^2+p^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{\omega e^{pt}dp}{\omega^2+p^2} = \sum_{j=1}^{2}\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}\omega}{\omega^2+p^2}, p_j\right] = \left.\frac{e^{pt}\omega}{2p}\right|_{p=-i\omega} +$$

$$+\left.\frac{e^{pt}\omega}{2p}\right|_{p=+i\omega} = \sin(\omega t).$$

Заметим, что в книге [6] рассмотрено большое количество примеров вычисления интегралов с помощью преобразования Меллина, мы более не будем на них останавливаться.

### *Решение дифференциальных уравнений операционным методом*

Одно из приложений операционного исчисления – решение обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом изображений. Однако здесь есть ограничения: задача для дифференциального уравнения должна быть начальной, должны быть поставлены условия Коши. В этом случае метод решения с помощью изображений получается достаточно простым.

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые мы сможем решать таким методом, имеет вид:

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t), \\ y\big|_{t=0} = y_0,\ y'\big|_{t=0} = y_1, \ldots, y^{(n-1)}\Big|_{t=0} = y_{n-1}, \end{cases}$$

где $a_0$, $a_1$, …, $a_n$, а так же $y_0$, …, $y_{n-1}$ – некоторые заданные постоянные величины, $f(t)$ – заданная функция, зависящая от независимой переменной $t$. $f(t)$ будем считать удовлетворяющей всем условиям существования изображения.

Решение задачи для дифференциального уравнения строится просто: мы берём уравнение $a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t)$ и строим его изображение Лапласа:

$$\int_0^\infty \left(a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y\right)e^{-pt}dp = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dp.$$

Заметим, что, когда мы интегрируем производную $k$-го порядка, мы получаем следующее выражение:

$$\int\limits_0^\infty y^{(k)}(t)e^{-pt}dp = -y^{(k-1)}(0) - y^{(k-2)}(0)p - y^{(k-3)}(0)p^2 - \ldots - y'(0)p^{k-2} -$$

$-y(0)p^{k-1} + Y(p)p^k$, где $Y(p) = \int\limits_0^\infty y(t)e^{-pt}dp$.

Следовательно, получим следующее преобразование:

$$\int\limits_0^\infty \left(a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y\right)e^{-pt}dp = \left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + a_{n-1}p + a_n\right)Y(p) + S_{n-1}(p),$$

где $S_{n-1}(p)$ – многочлен по параметру $p$, имеющий степень $n-1$, полученный из начальных условий:

$$S_{n-1}(p) = a_0\left(y_0 p^{n-1} + y_1 p^{n-2} + \ldots + y_{n-2}p + y_{n-1}\right) +$$

$+a_1\left(y_0 p^{n-2} + y_1 p^{n-3} + \ldots + y_{n-2}\right) + \ldots + a_{n-1}y_0$, а $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dp$.

В результате интегрального преобразования получится выражение вида:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n\right)Y(p) + S_{n-1}(p) = F(p).$$

Так как нам нужно найти $Y(p)$, то выразим $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{F(p) - S_{n-1}(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}.$$

Дальше остаётся только обратить полученный образ. Это тем более просто, что в знаменателе всегда оказывается многочлен, корни которого можно найти. Обычно поступают так: многочлен раскладывают на множители, а само выражение $\dfrac{F(p) - S_{n-1}(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}$ разбивают на элементарные множители, для каждого из которых находят прообраз отдельно, пользуясь линейностью обращения преобразования Лапласа.

**Пример**. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1. \end{cases}$$

*Решение.* Пользуясь формулами, указанными выше, получаем, что $Y(p) = \dfrac{1}{p^4 + 2p^2 + 1}$. Для обращения получаем интеграл, который удобно вычислить непосредственно: $y(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\dfrac{e^{pt}dp}{p^4+2p^2+1}$. Несложно видеть, что $p^4+2p^2+1=\left(p^2+1\right)^2$, или, если выделять комплексные корни, то $p^2+1=(p+i)(p-i)$, и $p^4+2p^2+1=\left(p^2+1\right)^2=(p+i)^2(p-i)^2$.

Подставляя полученное выражение в интеграл, получаем: $y(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\dfrac{e^{pt}dp}{(p+i)^2(p-i)^2}$. Таким образом, получается функция, имеющая полюса в точках $p=\pm i$, причём, как следует из вторых степеней знаменателя, полюса будут второго порядка.

Следовательно, интеграл несложно вычислить с помощью теории вычетов:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p^4+2p^2+1}=\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{p^4+2p^2+1},p=i\right]+\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{p^4+2p^2+1},p=-i\right]=$$

$$=\left.\left(\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{(p+i)^2}\right)\right|_{p=i}+\left.\left(\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{(p-i)^2}\right)\right|_{p=-i}=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Заметим, что нередко уравнения можно решить гораздо проще, не прибегая к вычислению интеграла вообще, а зная таблицу образов. В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

**Пример**. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y''+3y'+2y=0, \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1. \end{cases}$

*Решение.* Выполняем преобразование Лапласа. Получим:

$$\int\limits_0^\infty y''e^{-pt}dt=-y'(0)-y(0)p+p^2Y(p)=-1+p^2Y(p),$$

$$\int\limits_0^\infty y'e^{-pt}dt=-y(0)+pY(p)=pY(p),$$

в результате уравнение примет вид: $-1+p^2Y(p)+3pY(p)+2Y(p)=0$, откуда $Y(p)=\dfrac{1}{p^2+3p+2}$.

Выражение в знаменателе несложно разложить на множители, $Y\left(p\right)=\dfrac{1}{\left(p+1\right)\left(p+2\right)}$ и далее – на элементарные дроби: $Y\left(p\right)=\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{1}{p+2}$.

Согласно таблице, $\dfrac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t}$ и $\dfrac{1}{p+2}\risingdotseq e^{-2t}$, откуда получаем, что решение уравнения имеет вид: $y=e^{-t}-e^{-2t}$.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волколовский, Г.Л. Лунц, Г.Л. Араманович. – М.: Наука, 1970. – 324 с.
3. Карлов, М.И. Методические указания по решению задач курса ТФКП / М.И. Карлов, Е.С. Половинкин, М.И. Шабунин. – М.: МФТИ, 2007. – 78 с.
4. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие. – 2-е изд. перераб. и доп. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 304 с.
5. Львовский, С.М. Лекции по комплексному анализу. – 2-е изд. / С.М. Львовский. – М.: МЦНМО, 2009. – 136 с.
6. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 320 с.
7. Эйдерман, В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления / В.Я. Эйдерман. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.